

ЛЕКЦИЯ 5

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ

1. Вводные замечания

Мы будем в этой лекции рассматривать два простейших уравнения с частными производными: волновое уравнение и уравнение теплопроводности. Мы ограничимся рассмотрением уравнений с двумя независимыми переменными x, t ; уже случай 3 переменных является для нас сейчас непосильной темой. Таким образом, все будет происходить на прямой $-\infty < x < \infty$ (или на отрезке этой прямой) и в некотором интервале времени t .

Мы будем, как и в случае обыкновенных уравнений, рассматривать задачу Коши, или, в случае конечного отрезка, смешанную задачу: кроме начальных данных (при $t=0$) задаются подходящие краевые условия на концах рассматриваемого отрезка. Однако, ситуация здесь много сложнее, чем для обыкновенных дифференциальных уравнений по двум причинам. Первая из них очевидна: задача гораздо более громоздка, нужно превратить в дискретные две переменные x и t и в каждый момент времени t_n находить много значений неизвестной функции $u(x_k, t_n)$.

Вторая (и более важная) причина состоит в следующем. Простейшие дискретные (разностные) аппроксимации часто оказываются непригодными из-за возникающей неустойчивости. Поэтому вначале нужно думать не о том, чтобы найти более точный алгоритм, а о том, чтобы найти хоть какой-нибудь пригодный способ приближенного решения. Наконец, не нужно забывать, что уравнения с частными производными гораздо более «индивидуальны», чем обыкновенные уравнения — сама постановка правильной задачи зависит от уравнения. Вы увидите, что эта индивидуальность проявляется и при приближенном решении этих уравнений.

2. Уравнения

Одномерное волновое уравнение выглядит так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Общее решение этого уравнения записывается в виде

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct),$$

т. е. зависит от 2 произвольных функций f и g одной переменной. Слагаемое $f(x + ct)$ соответствует волне, распространяющейся влево, $g(x - ct)$ — вправо*. Всякое решение (1) есть суперпозиция двух таких волн. Простейшее уравнение «необратимого типа» имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad D > 0. \quad (2)$$

Если u — температура, то это уравнение описывает теплопроводность, если u — концентрация, то диффузию и т. д.

Полное волновое уравнение (1) является для нас все еще слишком сложным и для начала вместо (1) мы рассмотрим более простое уравнение, описывающее волны, распространяющиеся в одном направлении:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3)$$

Общее решение его есть

$$u(x, t) = f(x + ct). \quad (4)$$

Если при $t=0$ задать (для всех x) $u(x, 0) = f(x)$, то в момент t получим $u(x, t) = f(x + ct)$ — первоначальный профиль «волны» без искажения передвигается со скоростью $|c|$ (при $c > 0$ влево, а при $c < 0$ — вправо).

Как правило, нас интересует $u(x, t)$ не на всей прямой $-\infty < x < \infty$, а на отрезке $a \leq x \leq b$. Тогда, кроме начальных данных $u(x, 0)$, нужно (при $c > 0$) задать еще $u(b, t)$ — значения решения на правом конце (рис. 1).

На левом конце ничего задавать не нужно. Это легко понять, заметив, что решение $u(x, t)$ постоянно на прямых $x + ct = \text{const}$ — характеристиках уравнения (3). Значит, на левую границу $x=a$ значения u «приносятся» характеристиками снизу

* Мы считаем здесь $c > 0$.

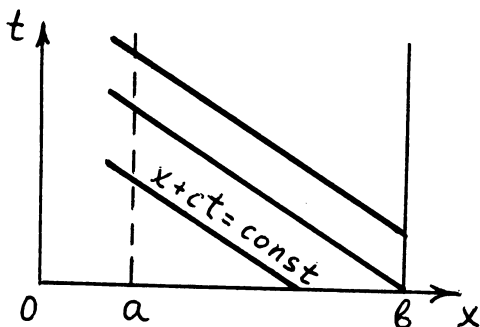


Рис. 1.

(с отрезка $t=0; a \leq x \leq b$) или справа (с отрезка $x=b; 0 \leq t \leq T$). Если в уравнении $u_t = cu_x$ c будет переменным ($c=c(x,t)$), то характеристики уже не будут прямыми*, но решение по-прежнему будет постоянно на характеристиках.

Наконец, для уравнения $u_t = c(x,t)u_x + F(x,t)$ решение уже не будет постоянным на характеристиках, но и здесь (при $c(x,t) > 0$) все влияния передаются справа налево. Более точно это означает вот что. Изменим $u(x,t)$ в некоторый момент t_0 на участке $a \leq x \leq b$. Тогда при $t > t_0$ решение изменится лишь в полоске между характеристиками (см. рис. 2). Правее же $x=b$ никаких изменений не произойдет.

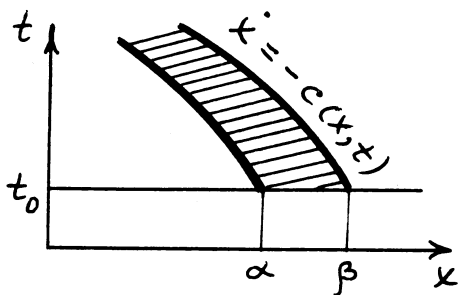


Рис. 2.

Для уравнения теплопроводности (2) нужно задавать граничные условия на обоих концах отрезка (a, b) . Если внести изменение в $u(x, t)$ в некоторый момент времени, то в следующие

* Характеристики будут здесь решения обыкновенного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -c(x, t).$$

моменты $u(x, t)$ изменится на всем отрезке. Таким образом, влияния передаются здесь в обе стороны и притом формально с бесконечной скоростью.

3. Простейшие разностные аппроксимации

Пусть требуется найти решение уравнения $u_t = cu_x$ (3) при $-\infty < x < \infty$ по известным начальным данным: $u(x, 0) = \varphi(x)$. Выберем некоторые малые τ и h и будем искать приближенное решение $u(x, t)$ лишь для значений $x_k = kh$, $t_n = n\tau$. Обозначим $u(x_k, t_n) = u_k^n$ * и заменим производные в уравнении (3) какими-нибудь приближенными дискретными выражениями. Это можно, конечно, сделать многими способами.

Например, так:

I	$\frac{1}{\tau} (u_k^{n+1} - u_k^n) = \frac{c}{h} (u_{k+1}^n - u_k^n)$	Схемы:	
II	$\frac{1}{\tau} (u_k^{n+1} - u_k^n) = \frac{c}{h} (u_k^n - u_{k-1}^n)$	Схемы:	(5)
III	$\frac{1}{\tau} (u_k^{n+1} - u_k^n) = \frac{c}{2h} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n)$	Схемы:	

Любое из уравнений (5) позволяет последовательно найти $u_k^1, u_k^2, \dots, u_k^n, \dots$, если положить $u_k^0 = \tilde{u}(x_k, 0) = \varphi(x_k)$. (Если ищется $u(x, t)$ при $0 \leq t \leq T$, то можно остановиться при $n = N = T/\tau$.)

Однако, не всеми формулами (5) можно пользоваться. При $c > 0$ формула II — совершенно непригодна. Формула III — практически непригодна. Формулой I можно пользоваться, если

$$\frac{c\tau}{h} \leq 1.$$

Легче всего забраковать формулу II. Если начальные данные отличны от нуля только на отрезке $[a, b]$, то картинка, соответствующая вычислениям по схеме II, будет выглядеть так (рис. 3; крестики — точки сетки, где u_k^n могут не равняться нулю): «Приближенное решение» $u(x, t)$ будет все время равно нулю левее $x = a$. Между тем, *точное* решение отлично от нуля в полосе между характеристиками, изображенными на рисунке. Вы видите, что $u(x, t)$ даже качественно не похоже на точное решение $u(x, t)$. Причина ясна: в дифференциальном уравнении (3) все влияния передаются *налево*, а в разностной системе II — *направо*.

* Иногда возникает опасность спутать верхний индекс n с показателем степени. В таких случаях мы будем писать $u_k^{(n)}$.

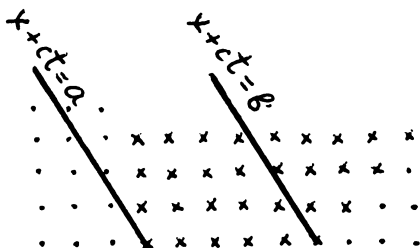


Рис. 3.

Аналогичные рассуждения показывают, что схема I может дать решение $\tilde{u}(x, t)$, близкое к $u(x, t)$, лишь при условии $ct \leq h$. На этот раз ненулевой участок решения будет со временем двигаться налево, как и должно быть. Посмотрим, однако, с какой скоростью движется граница, отделяющая невозмущенную область ($u \equiv 0$) от возмущенной ($u \neq 0$). За шаг τ эта граница передвигается влево на h . Значит, скорость ее движения $c_1 = h/\tau$. Скорость движения возмущения в точном уравнении c . Если $ct > h$, то $c > c_1$. Это означает, что граница ненулевого участка движется медленней, чем нужно. Ясно, что это

приводит к ошибочному результату и потому условие $\frac{c\tau}{h} \leq 1$ необходимо для разумности применения схемы I. Мы покажем потом, что это же условие является и достаточным. Итак, в этих двух случаях мы можем из самых простых и наглядных соображений откинуть непригодные аппроксимации. Что касается схемы III, то ее непригодность не очевидна. Действительно, возмущения здесь распространяются в обе стороны и при $\frac{c\tau}{h} \leq 1$ скорость их распространения достаточна. Тем не менее, вычислять по этой схеме нельзя*: ничтожные изменения в начальных данных или в процессе счета приводят к большим изменениям в дальнейшем.

Забегая вперед, я подчеркну, что дело здесь не только в приближенности вычислений. Даже если мы могли бы производить арифметические действия абсолютно точно, мы не получили бы по схеме III (при произвольных начальных данных) результата, близкого к точному. Позже мы это аккуратно сформулируем и докажем, а пока займемся вторым уравнением.

Для уравнения теплопроводности $u_t = Du_{xx}$ простейшая разностная аппроксимация имеет вид

* Если только не пользоваться очень малым шагом по времени (см. лекцию 6).

$$\frac{1}{\tau}(u_k^{n+1} - u_k^n) = \frac{D}{h^2}(u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n). \quad (6)$$

Перепишем:

$$u_k^{n+1} = \gamma u_{k+1}^n + (1 - 2\gamma) u_k^n + \gamma u_{k-1}^n; \quad \gamma = \frac{D\tau}{h^2}. \quad (6a)$$

Теперь ясно, что свойства этой разностной аппроксимации (или, как говорят, разностной схемы) зависят от (безразмерной) величины γ , а не от τ и h в отдельности. Оказывается, схема (6) пригодна при $\gamma \leq \frac{1}{2}$ и непригодна при $\gamma > \frac{1}{2}$ по той же причине — из-за возникающей неустойчивости*.

Нам следовало бы теперь определить точно, что такое устойчивость и неустойчивость, и выяснить, почему разностные схемы в одном случае устойчивы, в другом нет. Однако, раньше чем это делать, мы «докажем» одну неверную теорему. Я думаю, это поможет нам оценить деликатность ситуации и понять существо дела. Итак, следите за доказательством.

4. Теорема

Пусть для приближенного решения задачи Коши: $u_t = u_x$, $u(x, 0) = \varphi(x)$ используется аппроксимация

$$\frac{1}{\tau}(u_k^{n+1} - u_k^n) = \frac{1}{h}(u_k^n - u_{k-1}^n); \quad u_k^0 = \varphi(x_k). \quad (7)$$

Предположим, что τ и h стремятся к 0 так, что $\frac{\tau}{h} = \gamma$ остается постоянным. Тогда $\tilde{u}(x, t) \rightarrow u(x, t)$, т.е. решения разностных уравнений стремятся к решению дифференциального.

Раньше, чем доказывать, уточним формулировку. Функции $\tilde{u}(x, t)$ заданы не при всех x и t , а на дискретном множестве точек (которое к тому же меняется при изменении τ и h). Как понимать сходимость $\tilde{u}(x, t)$ к $u(x, t)$? Проще всего так:

$$\max |\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \rightarrow 0.$$

Здесь \max берется по всем $x = x_k$ и для всех $t = t_n$ из интервала $0 \leq t_n \leq T$.

Перейдем теперь к доказательству.

* О том, что $\gamma = \frac{1}{2}$ является «критическим» значением, можно догадаться: при $\gamma = \frac{1}{2}$ один из коэффициентов в (6a) меняет знак.

1 этап. Рассмотрим начальные данные специального вида:

$$u(x, 0) = e^{isx} *.$$

Точное решение при таких начальных данных есть

$$u(x, t) = e^{is(x+t)}.$$

Найдем приближенное решение по формуле (7):

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \frac{\tau}{h} (u_k^n - u_{k-1}^n) = (1 + \gamma) u_k^n - \gamma u_{k-1}^n; \quad \gamma = \frac{\tau}{h}.$$

Найдем u_k^n на первом слое (при $n=1$):

$$u_k^1 = (1 + \gamma) u_k^0 - \gamma u_{k-1}^0 = (1 + \gamma) e^{isx_k} - \gamma e^{is(x_k - h)} = e^{isx_k} [1 + \gamma - \gamma e^{-ish}].$$

Таким образом, переход от нулевого к первому слою сводится к умножению на $1 + \gamma - \gamma e^{-ish}$. Соответственно, на n -ом слое получим: $u_k^n = e^{isx_k} (1 + \gamma - \gamma e^{-ish})^n$; или, так как $n = t_n / \tau$

$$\tilde{u}(x, t) = e^{isx} [1 + \gamma(1 - e^{-ish})]^{t/\tau}. \quad (8)$$

Теперь

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0} [1 + \gamma(1 - e^{-ish})]^{t/\tau} &= \lim_{h \rightarrow 0} [1 + \gamma(1 - e^{-ish})]^{t/\gamma h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (1 + is\gamma h + o(h))^{t/\gamma h} = e^{ist} \quad (\gamma = \text{const!}). \end{aligned}$$

Итак: $\tilde{u}(x, t) \rightarrow e^{isx} \cdot e^{ist} = u(x, t)$, т.е. для начальных данных специального вида сходимость доказана.

2 этап. Пусть теперь $u(x, 0) = \varphi(x)$ — произвольная функция, достаточно гладкая и равная 0 вне конечного интервала. Разложим ее в интеграл Фурье:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{isx} ds.$$

Точное решение будет иметь вид

$$u(x, t) = \varphi(x+t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{isx} e^{ist} ds.$$

* Вас не должно смущать то, что мы рассматриваем здесь комплексные решения. Как и всегда при изучении линейных уравнений, можно все вычисления производить в комплексной форме, а в окончательном ответе, если это нужно, перейти к вещественным величинам.

Для приближенного решения в силу линейности разностных уравнений тоже получим интеграл:

$$\tilde{u}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{isx} [1 + \gamma(1 - e^{-ish})]^{t/\gamma h} ds. \quad (9)$$

Теперь устремим h к 0, переходя в (9) к пределу под знаком интеграла; получим: $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{u}(x, t) = u(x, t)$ — результат явно аб-

сурдный. Ведь (7) — это та самая схема (5, II), которая здесь (при $c=1$) совершенно не годится.

В чем дело? Вы, вероятно, уже догадались. На первом этапе все правильно*. А вот предельного перехода под знаком интеграла здесь совершать нельзя! Мы ошибаемся как раз в том месте, в котором нематематик склонен не задумываться (предоставляя излишнее, как он полагает, «наведение строгости», математикам).

Итак, если взять начальные данные в виде отдельной гармоник ($u(x, 0) = \cos sx$ или $\sin sx$) или суммы конечного числа гармоник, и если вычисления производить абсолютно точно, то эта глупая и бессмысленная схема дает в пределе правильный ответ. Однако, чем выше будет частота (чем больше s), тем меньшие h понадобятся, тем «позже» будет хорошее приближение. Можно сказать, что трудности вызываются высокими частотами. Это есть полезный урок из этой неверной теоремы. Второй полезный урок — прием использования специального вида начальных данных. Этот прием нам очень пригодится.

5. Определение устойчивости

Поясним сначала суть дела. Пусть нам дано дифференциальное уравнение

$$D_{x,t}[u] = 0 \quad (10)$$

($D_{x,t}$ — дифференциальный оператор, включающий в себе дифференцирование по x и по t). Требуется решить задачу Коши при заданных начальных условиях $u(x, 0) = \varphi(x)$.

Рассмотрим разностное уравнение $\bar{D}_{x,t}[\bar{u}] = 0$, соответствующее дифференциальному уравнению (10), $\bar{D}_{x,t}$ — разностный оператор зависящий от выбора τ и h ; пусть $\bar{u}(x, 0) = \varphi(x)$. Нас интересует $u(x, t)$ при $-\infty < x < \infty$; $0 \leq t \leq T$. Поэтому нужно найти $u(x, t)$ для тех же пределов изменения x и t . Мы хотим, чтобы эта задача была «хорошей», т. е., чтобы небольшим изменениям в начальных данных отвечали бы небольшие изменения решения в целом.

* Хотя наши рассуждения и не были безусловно строгими.

Сосредоточимся теперь на линейных задачах. Для линейных уравнений есть смысл выделить в записи однородную и неоднородную часть:

$$L[u] = f \quad \text{и} \quad \tilde{L}[\tilde{u}] = \tilde{f}.$$

Если уравнение линейное, то изменение начальных данных равносильно добавлению к решению некоторого решения однородного уравнения. Действительно, если $L[u_1] = f$ и $L[u_2] = \tilde{f}$, то разность $u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению $L[u_1 - u_2] = 0$. Итак, однородное линейное уравнение $L[u] = 0$ должно иметь «малое» решение при «малых» начальных данных. Однако для однородной линейной задачи понятие «малости» решения теряет смысл (можно умножить начальные данные на миллион и решение тоже умножится на миллион). Разумно требовать, чтобы решение не очень превосходило начальные данные. Вот к чему сводится для этого случая требование устойчивости решения задачи Коши.

О п р е д е л е н и е

Задача Коши для линейного разностного уравнения

$$L_{\tau, h}[\tilde{u}] = \tilde{f}; \quad \tilde{u}(x, 0) = \varphi(x); \quad 0 \leq t \leq T$$

называется устойчивой, если для решения соответствующего однородного уравнения $L_{\tau, h}[\tilde{w}] = 0$ справедливо неравенство:

$$|\tilde{w}(kh, n\tau)| \leq C \max_k |\tilde{w}(kh, 0)| \quad (11)$$

при всех допустимых τ, h ; $-\infty < k < \infty$; $0 \leq n\tau \leq T$. Постоянная C не должна зависеть от τ и h .

6. Пояснения и замечания к определению устойчивости

1) Определение, строго говоря, относится не к одной разностной задаче Коши, а к совокупности таких задач (при разных τ, h). Предполагается, что все разностные уравнения построены по одной схеме. Поэтому чаще говорят об устойчивости разностной схемы.

2) Неравенство (11) является ограничением лишь тогда, когда τ и h могут быть сколь угодно малы: для фиксированных τ и h константу C всегда можно подобрать (так как число слоев по времени тоже будет фиксировано). Таким образом, понятие устойчивости разностной схемы есть предельное, асимптотическое понятие. Однако, в определении не требуется, чтобы τ и h могли стремиться к 0 произвольно, независимо друг от друга. Такое требование (абсолютная устойчивость) обычно бывает слишком сильным. С типичными ограничениями мы уже встречались:

$$\frac{c\tau}{h} \leq 1 \quad \text{или} \quad \frac{D\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

3) По смыслу определения постоянная C не должна возрастать с уменьшением τ (и соответствующим увеличением $N = T/\tau$). Однако, с ростом T C вполне может расти, так что, вообще говоря, $C = C(T)$.

4) Задача Коши на бесконечной прямой встречается сравнительно редко. Чаще мы имеем дело с конечным отрезком. В этом случае нужно определять устойчивость смешанной задачи.

Обозначим через Γ ту часть границы, где задаются краевые условия (включая сюда и начальные условия). Например, для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ это 3 отрезка. Мы будем требовать, чтобы (рис. 4)

$$|\bar{u}(x, t)| \leq C \max_{\Gamma} |\bar{u}(x, t)|.$$

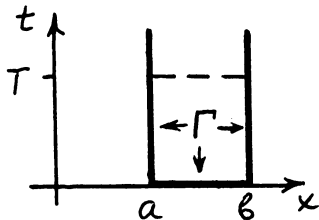


Рис. 4

Максимум берется теперь по начальным и граничным условиям.

Последнее, методологическое замечание. Определение устойчивости почти дословно повторяется для обыкновенных (одномерных) разностных уравнений. Правда, проблема устойчивости при решении обыкновенных дифференциальных уравнений не стоит столь остро — можно использовать готовые, проверенные формулы — но почти все идеи можно понять на этом случае. В то же время запись сильно упрощается. Поэтому, когда мы будем более глубоко рассматривать эту тему, то начнем с обыкновенных дифференциальных и, соответственно, одномерных разностных уравнений.

7. Обнаружение неустойчивости разностных аппроксимаций по методу Фурье

Рассмотрим снова задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t \leq T; \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

Покажем, что простейшая разностная схема (см. 6а)

$$u_k^{(n+1)} = \gamma u_{k-1}^{(n)} + (1-2\gamma) u_k^{(n)} + \gamma u_{k+1}^{(n)} \quad (12)$$

неустойчива при $\gamma = \frac{D\tau}{h^2} > \frac{1}{2}$. Для этого выберем такие на-

чальные данные, при которых решение легко находится в явном виде. Вычисления удобно провести в комплексной форме. Задав начальные данные в виде $\tilde{u}(x, 0) = e^{isx}$, ищем решение уравнений (12) по методу Фурье в виде

$$\tilde{u}(x, t) = e^{isx + \lambda t} \quad \text{или} \quad u_k^{(n)} = \tilde{u}(kh, n\tau) = e^{iskh + \lambda n\tau}. \quad (13)$$

Обозначим $e^{\lambda\tau} = \mu$, подставим в (12) и сократим на $\mu^n e^{iskh}$, получим

$$\mu = \gamma e^{-ish} + 1 - 2\gamma + \gamma e^{ish} = 1 - 2\gamma + 2\gamma \cos sh.$$

Поскольку $|u_k^{(n)}| = \mu^n$, оценим $|\mu|$. Очевидно, $1 - 4\gamma \leq \mu \leq 1$. Значит, при $\gamma \leq \frac{1}{2}$ $|\mu| \leq 1$ и $|\tilde{u}(x, t)| \leq 1$.

При $\gamma > \frac{1}{2}$ выберем $s = \pi/h$, тогда $|1 - 4\gamma| > 1$.

При максимальном значении $t = T = n\tau$, получим $|\tilde{u}(x, t)| = \mu^n$. Эта величина при $\tau \rightarrow 0$ (т.е. $N \rightarrow \infty$) неограниченно растет. Вы видите, что требование $|\tilde{u}(x, t)| \leq C$ не выполнено — неустойчивость схемы (12) при $\gamma > \frac{1}{2}$ доказана. Вполне аналогично исследуется методом Фурье устойчивость задачи Коши для других разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Особенно замечательно, что исследование устойчивости методом Фурье для уравнения $u_t = cu_x$ автоматически бракует те разностные схемы, (5, I) и (5, II), непригодность которых мы выясняли, рассматривая распространение возмущений. Мы могли вовсе ничего не знать о том, как «передаются влияния» этими схемами и отбросить их в силу неустойчивости. Смотрите, как красиво это получается. Пусть для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}$ использована схема (5, II):

$$u_k^{(n+1)} = (1 + \gamma) u_k^{(n)} - \gamma u_{k-1}^{(n)}, \quad \gamma = \frac{c\tau}{h}.$$

Положим $u_k^{(n)} = e^{isk} \lambda^n$, тогда $\lambda(s) = 1 + \gamma - \gamma e^{-is}$. Когда s меняется от 0 до 2π , $\lambda(s)$ описывает окружности, изображенные на рис. 5. При $\gamma > 0$ $|\lambda(s)| \geq 1$ ($|\lambda|_{\max} = 1 + 2\gamma$) — схема неустойчива. При $c < 0$ и $|\gamma| < 1$ окружность Ω лежит внутри единичного круга — схема устойчива (точнее, не обнаруживает неустойчивости по методу Фурье). Наконец, при $c < 0$ и $|\gamma| > 1$ (рис. 5в) схема неустойчива — $\max |\lambda(s)| = 2|\gamma| - 1 > 1$. Последнее замечание. Чтобы обнаружить неустойчивость, достаточно ее обнаружить хоть на чем-нибудь. Чтобы доказать устойчивость, нужно провести доказательство для всех начальных данных. Это, конечно, труднее, но для тех простых примеров, которые рассматриваются в этой лекции, мы в состоянии это сделать.

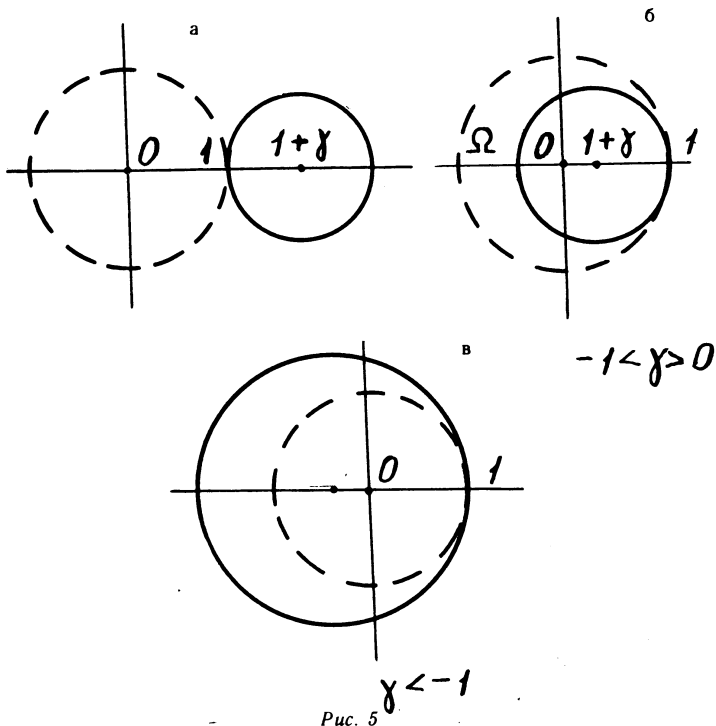


Рис. 5

8. Пример доказательства устойчивости разностной схемы

Покажем, что для уравнения $u_t = Du_{xx}$ схема (12) является устойчивой при $\gamma = \frac{D\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$. Если $\gamma \leq \frac{1}{2}$, то $1 - 2\gamma \geq 0$. Значит

$$\begin{aligned}
 |u_k^{(n+1)}| &\leq \gamma |u_{k-1}^{(n)}| + (1 - 2\gamma) |u_k^{(n)}| + \gamma |u_{k+1}^{(n)}| \leq \\
 &\leq [2\gamma + (1 - 2\gamma)] \max_k |u_k^{(n)}| = \max_k |u_k^{(n)}|.
 \end{aligned}$$

Или: $\max_k |u_k^{(n+1)}| \leq \max_k |u_k^{(n)}|$, т.е. при переходе от момента $t = n\tau$ к моменту $t = n\tau + \tau$ $\max |\bar{u}|$ не возрастает.

Итак, при всех k и n $|u_k^{(n)}| \leq \max_k |u_k^{(0)}|$ или

$$|\bar{u}(x, t)| \leq \max |\bar{u}(x, 0)| \quad (13).$$

Определение устойчивости выполнено. Постоянная C здесь

оказалась равной 1 — не зависящей не только от τ и h (что требуется), но и от промежутка изменения времени. Как и должно быть, при $\gamma > \frac{1}{2}$ наше рассуждение не проходит: в оценку войдет величина $|1 - 2\gamma| + 2\gamma$, которая > 1 .

К этому доказательству полезно сделать несколько замечаний.

1. Доказательство дословно повторяется для случая краевой задачи, если на границах заданы значения u ; при этом вместо (13) получается

$$|\tilde{u}(x, t)| \leq \max_{\Gamma} |\tilde{u}| \quad (14)$$

Γ — та часть границы, где задаются краевые условия (см. рис. 4).

2. Свойство (14) — решение не превосходит максимума исходных данных — называют «принципом максимума». Как известно, исходное уравнение $u_t = Du_{xx}$ обладает этим свойством.

Разностное уравнение (12) обладает им при $\gamma \leq \frac{1}{2}$ и не обладает при $\gamma > \frac{1}{2}$. (В первом мы убедились, второе легко проверить).

3. В проведенном доказательстве нигде не используется постоянство D . Если $D = D(x, t)$, схема будет устойчивой при

$$\bar{\gamma} = \frac{\tau}{h^2} \max D(x, t) \leq \frac{1}{2} * \quad (15)$$

4. Для уравнения $u_t = cu_x$ тоже справедлив принцип максимума. При $c > 0$ разностная система I (схема :.) сохраняет этот принцип, если $\gamma = \frac{c\tau}{h} \leq 1$. Отсюда вытекает устойчивость этой схемы. Коэффициент c снова может быть переменным.

* Впрочем, при переменном коэффициенте теплопроводности правильнее писать $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right)$. И здесь для устойчивости простейшей разностной схемы условия (15) достаточно.