

ЛЕКЦИЯ 3

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В этой теме есть две основные идеи:

1) идея линеаризации, т. е. приближенной замены нелинейной системы уравнений — линейной;

2) идея последовательных приближений: искомое решение нелинейной задачи ищется как предел последовательности, члены которой получаются друг из друга по заданному правилу.

Эти две фундаментальные идеи математического анализа приобретают в вычислительной математике особое значение, проникая почти во все ее разделы.

1. Локальная постановка задачи

Мы будем заниматься решением системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad f(x) = 0.$$

Мы убедимся в том, что последовательные приближения сходятся к интересующему нас решению, *если* исходное значение $x^{(0)}$ выбрано достаточно близко к решению. Далее мы будем заниматься именно такой «локальной» задачей.

Что касается нахождения подходящего *начального* приближения, — исходного для метода последовательных приближений, то для такой задачи не существует универсальных алгоритмов, и она может иногда быть очень трудной. Мы начнем со случая одного уравнения — многое можно понять уже в этом простом случае.

Итак, рассмотрим уравнение $f(x) = 0$, и пусть a — его решение. Пусть $x^{(0)}$ — приближенное значение решения, найденное графически или каким-нибудь другим способом. Требуется найти a с заданной точностью. Основная идея, используемая для решения такой локальной задачи, состоит в следующем: всякая функция $f(x)$ локально, на небольшом промежутке изменения аргумента, близка к линейной функции*.

Если приближенно заменить $f(x)$ на линейную функцию $l(x) = kx + b$ в окрестности $x^{(0)}$ (содержащей a), то можно надеяться, что корень $x^{(1)}$ линейного уравнения $l(x) = 0$ будет мало отличаться от a . Его мы и примем за приближенное значение корня уравнения $f(x) = 0$.

3. Метод Ньютона

Выражение « $l(x)$ мало отличается от $f(x)$ », не является вполне определенным.

Как бы ни был уточнен его смысл, подходящих линейных функций существует бесконечно много и строить их можно по-разному.

Наиболее универсальным (одинаково применимым как к случаю одного уравнения, так и к случаю системы) является способ, предложенный Ньютоном. По методу Ньютона в качестве $l(x)$ выбирают первые два члена в формуле Тэйлора для $f(x)$ в точке $x^{(0)}$:

$$l(x) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}).$$

Уравнение $l(x) = 0$ имеет решение $x^{(1)} = x^{(0)} - f(x^{(0)})/f'(x^{(0)})$. Приняв $x^{(1)}$ за исходное значение, можно аналогично найти $x^{(2)}$. Повторяя этот процесс, получим последовательность $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(s)}, \dots$. При этом

$$x^{(s+1)} = x^{(s)} - \frac{f(x^{(s)})}{f'(x^{(s)})} = g(x^{(s)}); \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (1)$$

Метод Ньютона имеет простую геометрическую интерпретацию. В самом деле, прямая $y = l(x)$, где $l(x) = f_0 + f'_0 \cdot (x - x^{(0)})$, есть касательная к графику $y = f(x)$, а значение $x^{(1)}$ есть абсцисса точки пересечения этой касательной с осью x . Поэтому метод Ньютона для одного уравнения называют иногда методом касательных.

* Более точно — всякая дифференцируемая функция. Заметьте, что это та самая идея, которая лежит в основе дифференциального исчисления.

§ 4. Поведение последовательности $x^{(s)}$

Будут ли значения $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(s)}, \dots$, полученные по методу Ньютона, неограниченно приближаться к корню a ? Это зависит от того, насколько удачно выбрано $x^{(0)}$. Для случая одного уравнения, которым мы пока занимаемся, представление о поведении последовательности $x^{(s)}$ можно получить из рассмотрения рисунков. Типичные случаи таковы (рис. 1—5).

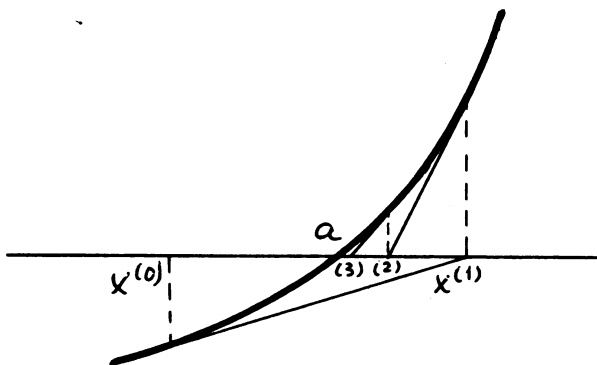


Рис. 1

Функция монотонна и выпукла в одну сторону (на рисунке $f' > 0, f'' > 0$). Последовательность $x^{(s)} \rightarrow a$ при *любом* $x^{(0)}$. Если $x^{(0)} > a$, то последовательность монотонно убывает. При $x^{(0)} < a$, получим $x^{(1)} > a$; последующие $x^{(s)}$ приближаются к корню справа.

Случай 1 редко имеет место при всех x , но в *некоторой окрестности* корня он является нормальным: если $f'(a) \neq 0$ и $f''(a) \neq 0$, то на небольшом отрезке около a f' и f'' сохраняют знак.

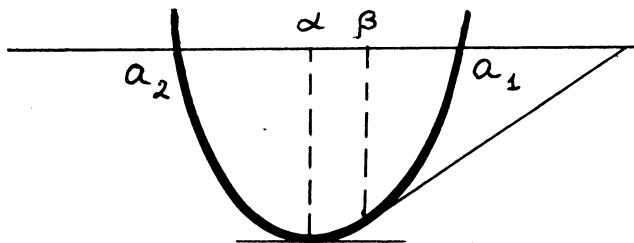


Рис. 2

Здесь при $x^{(0)} > a$ (т. е. при $f'(x^{(0)}) > 0$) последовательность $x^{(s)}$ сходится к правому корню — это уже рассмотренный случай 1. При $x^{(0)} < a$ $x^{(s)}$ сходятся к левому корню. Таким обра-

зом, есть зона притяжения правого корня и зона притяжения левого корня. Границей между ними служит точка a , где $f'(a)=0$ (в самой этой точке метод Ньютона отказывает!). Заметим, что если $x^{(0)}$ близко к a (на рисунке $x^{(0)}=\beta$), то $x^{(1)}$ будет отстоять далеко от корня — дальше, чем $x^{(0)}$. Все последующие $x^{(s)}$ будут приближаться к корню (рис. 2).

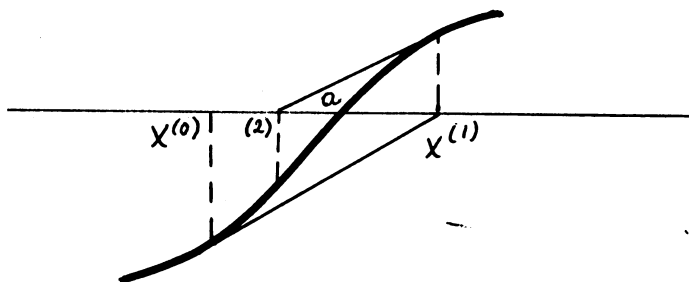


Рис. 3,а

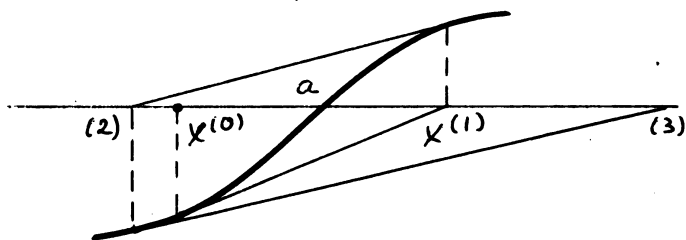


Рис. 3,б

График $y=f(x)$ имеет перегиб при $x=a$, т. е. $f''(a)=0$. При $x^{(0)}$, близком к a , последовательность $x^{(s)}$ будет колебаться вокруг a , все более приближаясь к корню. Если $x^{(0)}$ выбрать подальше, то последовательность $x^{(s)}$ может совсем не иметь предела (рис. 3,а,б).

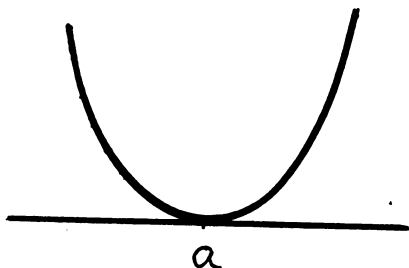


Рис. 4

Двукратный корень: $f(a) = f'(a) = 0$; $f''(a) \neq 0$. Здесь будет сходимость для любого $x^{(0)}$ (в области, где f'' не меняет знак). Забегая вперед, заметим, что сходимость здесь медленнее, чем в случае простого корня (рис. 4).

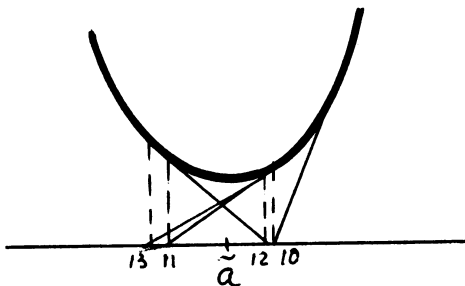


Рис. 5

В вычислительной практике встречаются и такие случаи: был кратный корень, но уравнение слегка возмутилось и корень исчез. В таком случае метод Ньютона дает последовательность, которая (с некоторого номера) колеблется и, конечно, нигде не сходится. При этом с некоторого момента становятся приблизительно равными все четные и все нечетные члены последовательности (скажем, $x_{10} \approx x_{12} \approx x_{14}, \dots, x_{11} \approx x_{13} \approx x_{15}, \dots$) (рис. 5).

5. Алгебраические уравнения

В случае, когда $f(x)$ — многочлен, уравнение $f(x) = 0$ называется алгебраическим. Для алгебраического уравнения обычно бывает интересна задача в целом: нахождение *всех* корней, установление области, где лежат все корни и т. д. Для решения таких задач существуют специальные методы, использующие алгебраичность уравнения. Сейчас мы ими заниматься не будем и заметим только вот что. Если $f(x)$ — многочлен, то $g(x)$ в (1) — рациональная функция.

Таким образом, при решении алгебраического уравнения любой степени по методу Ньютона вычисления сводятся лишь к рациональным операциям (сложению, вычитанию, умножению и делению). Извлекать корни (т. е. находить \sqrt{c} , $\sqrt[3]{c}$, ...) при этих вычислениях не требуется. Наоборот, метод Ньютона можно применить для приближенного вычисления корней.

Например, вычисление \sqrt{c} ($c > 0$) есть нахождение положительного решения уравнения $x^2 - c = 0$. Формула Ньютона для этого уравнения выглядит так:

$$x^{(s+1)} = \frac{1}{2} \left(x^{(s)} + \frac{c}{x^{(s)}} \right). \quad (2)$$

Каково бы ни было $x^{(0)} > 0$, процесс сходится (это случай, изображенный на рис. 2). Вычислительные машины обычно не пользуются таблицами: значения квадратных корней вычисляются каждый раз, когда они нужны, как раз по формуле (2) *.

6. Огрубленный метод Ньютона

Способ Ньютона можно несколько изменить с тем, чтобы избежать вычисления $f'(x)$ на каждом шаге. (Это оказывается особенно полезным при решении *системы уравнений*). Именно, если $x^{(0)} = c$ достаточно близко к корню, то можно на всех шагах вместо $f'(x^{(s)})$ использовать $f'(c)$.

Последовательные приближения будут вычисляться в этом случае по формуле:

$$x^{(s+1)} = g_c(x^{(s)}); \quad g_c(x) = x - \frac{f(x)}{f'(c)}. \quad (3)$$

7. Метод Ньютона как метод итераций

Последовательные приближения по методу Ньютона находятся по формуле $x^{(s+1)} = g(x^{(s)})$. Если последовательность $x^{(s)}$ сходится к a , то, переходя в обеих частях этого равенства к пределу, получим $a = g(a)$, т.е. a является корнем уравнения $x = g(x)$. Легко проверяется, что это уравнение эквивалентно исходному $f(x) = 0$, как для точного, так и для огрубленного метода Ньютона **.

Таким образом, мы можем взглянуть на метод Ньютона со следующей общей точки зрения. Исходное уравнение $f(x) = 0$ заменяется эквивалентным ему уравнением специального вида: $x = g(x)$. Это новое уравнение мы пытаемся решить «итерациями»: $x^{(s+1)} = g(x^{(s)})$.

Специфика метода проявляется в выборе g (для точного метода Ньютона одна функция g , для огрубленного — другая и т.д.). Сама процедура итераций во всех случаях одинакова. Разумно поэтому рассмотреть вопрос о сходимости итераций отдельно.

8. Достаточное условие сходимости итераций

Т е о р е м а. Предположим, что уравнение $x = g(x)$ имеет решение $x = a$.

Если

$$|g'(x)| \leq q < 1, \quad (4)$$

* Формула (2) последовательных приближений для \sqrt{c} была известна еще древним грекам.

** Это утверждение нуждается в некотором уточнении, если уравнение $f(x) = 0$ имеет «кратный» корень x . ($f(x_0) = f'(x_0) = 0$).

то при произвольном $x^{(0)}$ последовательность $x^{(s+1)} = g(x^{(s)})$ сходится к a .

Уточнение. Если условие (4) выполнено в окрестности корня $x=a$, то теорема остается верной, если $x^{(0)}$ лежит в этой же окрестности.

Доказательство теоремы. Оценим разность $x^{(s+1)} - a$. По формуле конечных приращений (т. к. $a = g(a)$)

$$g(x^{(s)}) - g(a) = g'(\xi^{(s)})(x^{(s)} - a); \xi^{(s)} = a + \theta(x^{(s)} - a), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Таким образом

$$|x^{(s+1)} - a| \leq q |x^{(s)} - a| \leq q^{s+1} |x^{(0)} - a| \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве мы не только установили факт сходимости, но и оценили ее скорость. Именно, разность $x^{(s)} - a$ стремится к 0 не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем q :

$$|x^{(s)} - a| \leq \text{const} \cdot q^s.$$

В таких случаях говорят коротко о сходимости со скоростью геометрической прогрессии.

9. Добавления и уточнения к теореме о сходимости

1) Предположим, что $g'(a) = \lambda \neq 0$ (и выполнено условие (4)). Тогда можно утверждать несколько больше, чем было доказано. Именно, скорость сходимости будет точно определяться числом λ :

$$x^{(s)} - a \sim k\lambda^s \quad (\text{т. е. } x^{(s)} - a = k\lambda^s + o(\lambda^s)).$$

В частности, при $\lambda > 0$ мы будем (с некоторого номера s) приближаться к корню с одной стороны. Если же $\lambda < 0$, то сходимость будет осциллирующей: $x^{(s)}$ попеременно справа и слева от a . Заметим, что разности соседних приближений ведут себя аналогично:

$$\Delta x^{(s)} = x^{(s+1)} - x^{(s)} \sim k(\lambda - 1)\lambda^s = k_1\lambda^s.$$

Наблюдая за этими разностями, можно приближенно определить λ .

2) (после первого — очевидное замечание). Если $g'(a) = 0$, то $x^{(s)} - a$ стремится к 0 быстрее, чем любая геометрическая прогрессия.

3) Если $|g'(a)| > 1$ (строго больше!), то сходимости итераций заведомо нет. В случае, если $|g'(a)| < 1$ (и $g'(x)$ — непрерыв-

на), то в некоторой окрестности a $|g'(x)| \leq q < 1$ и теорема гарантирует сходимость.

Таким образом, не ясным остается лишь случай $|g'(a)| = 1$. Как и всегда, этот промежуточный случай тоньше. Итерации в этом случае могут сходиться, а могут и не сходиться. Но даже если сходимость есть, она очень медленная и практически мало интересна.

4) Основное условие теоремы — малость производной — можно заменить несколько более общим: для любых u и v должно выполняться неравенство

$$|g(u) - g(v)| \leq q|u - v|, \quad q < 1. \quad (5)$$

Если g имеет непрерывную производную, то (5) эквивалентно (4).

5) Если условие (4) или (5) выполнено при всех x , то легко доказать не только сходимость, но и *существование* единственного решения (в теореме существование решения предполагается заранее). Единственность доказывается совсем просто. Если a_1 и a_2 — два решения, то:

$$|a_1 - a_2| = |g(a_1) - g(a_2)| \leq q|a_1 - a_2| < |a_1 - a_2| \text{ — противоречие.}$$

Последнее замечание. Простота доказательства теоремы не делает ее тривиальной и второстепенной. Напротив, эта теорема играет большую роль и допускает важные обобщения.

10. Сходимость огрубленного метода Ньютона для некратного корня

Последовательные приближения для этого метода вычисляются по формуле

$$x^{(s+1)} = g_c(x^{(s)}), \quad \text{где} \quad g_c(x) = x - \frac{f(x)}{f'(c)}.$$

Чтобы применить теорему о сходимости итераций, вычислим $g'_c(x)$:

$$g'_c(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(c)} = \frac{f'(c) - f'(x)}{f'(c)}.$$

Предположим теперь, что в точке a (a — решение уравнения $f(x) = 0$) производная $f'(a) = \lambda \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности этой точки $|f'(x)| \geq \frac{1}{2} |\lambda| = k$. Выберем теперь еще меньшую окрестность $U(a)$ так, чтобы для любых x и ξ , лежащих

в U , было: $|f'(x) - f'(\xi)| < \varepsilon$ *. Если c выбрана в этой окрестности ($c \in U$), то для $x \in U$

$$|g'_c(x)| < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Выбором достаточно малой окрестности U мы можем сделать $q = \frac{\varepsilon}{k} < 1$ ($k = \frac{1}{2} |f'(a)|$ — фиксировано!). В такой окрестности $U(a)$ можно гарантировать сходимость огрубленного метода Ньютона **. Обычно

$$g'_c(a) = \frac{f'(c) - f'(a)}{f'(c)} \neq 0$$

и огрубленный метод Ньютона сходится с «нормальной» скоростью — скоростью геометрической прогрессии. При этом чем меньше окрестность U , тем меньше q , и тем быстрее сходимость.

11. Сходимость метода Ньютона

В этом случае

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}; \quad g'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Если $f(a) = 0$, $f'(a) \neq 0$, то $g'(a) = 0$ — можно ожидать очень быстрой сходимости (см. п. 9). Действительно

$$|x^{(s+1)} - a| = |g(x^{(s)}) - g(a)| \leq C |x^{(s)} - a|^2, \quad (6)$$

где

$$C = \frac{1}{2} \max |g''(x)|. \quad (6')$$

Если обозначить $x^{(s)} - a = \delta_s$, то мы получим: $|\delta_{s+1}| \leq C \delta_s^2$. Грубо говоря, ошибка на каждом шаге возводится в квадрат. Эта характерная для метода Ньютона очень быстрая «ньютоновская» сходимость наблюдается на практике редко, поскольку точным методом Ньютона удается воспользоваться в сравнительно небольшом числе случаев.

Замечательно, что точный метод Ньютона (для одного урав-

* Здесь, как и раньше, мы предполагаем, что все встречающиеся функции непрерывны.

** Легко оценить величину такой окрестности через $\max |f''(x)|$.

нения) оказывается достаточно сильным, чтобы обеспечить сходимость и в случае кратного корня*.

Рассмотрим для примера случай двукратного корня:

$$f(a) = f'(a) = 0; \quad f''(a) = m \neq 0.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2} m(x-a)^2 + o(x-a)^2$$

$$f'(x) = m(x-a) + o(x-a)$$

$$g(x) - a = \frac{1}{2} (x-a) + o(x-a).$$

Отсюда $x^{(s+1)} - a \approx \frac{1}{2} (x^{(s)} - a)$ — имеет место сходимость со скоростью геометрической прогрессии $\left(\frac{1}{2}\right)^s$. Скорость сходимости не зависит от выбора функции $f(x)$!

12. Система двух уравнений

При переходе к системам любого числа уравнений нам не понадобится никаких новых идей. Чтобы не затемнять индексами прозрачное существо дела, рассмотрим сначала систему двух уравнений:

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0.$$

Предположим, что $(x^{(0)}, y^{(0)})$ близко к решению этой системы (a, b) . Положим $x = x^{(0)} + \Delta x$, $y = y^{(0)} + \Delta y$, подставим в систему и линеаризуем ее:

$$\begin{aligned} f_1(x^{(0)}, y^{(0)}) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^{(0)}, y^{(0)}) \Delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x^{(0)}, y^{(0)}) \Delta y &= 0 \\ f_2(x^{(0)}, y^{(0)}) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^{(0)}, y^{(0)}) \Delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^{(0)}, y^{(0)}) \Delta y &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Из этой системы двух линейных уравнений находим Δx и Δy ; затем: $x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x$, $y^{(1)} = y^{(0)} + \Delta y$. Это — первое приближение метода Ньютона. Заменяя в (7) $(x^{(0)}, y^{(0)})$ на $(x^{(s)}, y^{(s)})$, получим формулы для приращений на s -ом шаге метода Ньютона.

Если частные производные на всех шагах сохраняются такими, какими они были на первом шаге, получим снова видоизмененный (огрубленный) метод Ньютона.

* В этом случае сама идея линеаризации в окрестности a кажется неприменимой: линейный член в формуле Тэйлора в точке a отсутствует!

Как и в случае одного уравнения, для нахождения подходящего нулевого приближения не существует универсального способа, но, конечно, для системы эта задача гораздо труднее.

К счастью, довольно распространен случай, когда решение систем нелинейных уравнений входит как составная часть в большую вычислительную задачу. Тогда на каждом этапе большой задачи приходится решать систему, мало отличающуюся от предыдущей. Решение предыдущей системы и является в этом случае подходящим начальным приближением для следующей системы.

13. Система уравнений. Метод Ньютона

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть дана система уравнений: $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$; $i = 1, 2, \dots, n$, или, коротко, $f(x) = 0$ и пусть a — решение этой системы. Предположим, что $x^{(0)}$ близко к a . Напишем $x = x^{(0)} + \Delta x$ и будем искать Δx .

Уравнение $f(x) = 0$ или $f(x^{(0)} + \Delta x) = 0$, мы заменяем по методу Ньютона на линейное уравнение (точнее линейную систему), оставив два члена в формуле Тэйлора:

$$f(x^{(0)} + \Delta x) \approx f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)}) \cdot \Delta x.$$

Итак, Δx есть решение линейной системы

$$\frac{df}{dx}(x^{(0)}) \cdot \Delta x = -f(x^{(0)}) \quad (8)$$

или в полной записи

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \Delta x_k = -f_i(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}). \quad (8a)$$

Найдя Δx , мы получим приближенное решение системы:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x.$$

Аналогично строятся следующие приближения. Таким образом, на каждом шаге метода Ньютона нужно решать систему n линейных уравнений. Как и раньше, можно загрузить метод, используя на всех шагах значение $f'(c)$ вместо $f'(x^{(s)})$. Тогда на каждом шаге придется решать одну и ту же систему линейных уравнений (будут меняться лишь правые части). Такое видоизменение метода Ньютона обычно тем более полезно, чем больше n (число уравнений): точный метод Ньютона требует на

каждом шаге вычисления $n^2 + n$ функций, а огрубленный (начиная со второго шага) — лишь n функций*.

14. О сходимости метода Ньютона для системы уравнений

Положение дел здесь, в общем, такое же, как для одного уравнения. Именно. Последовательные приближения, отвечающие точному или огрубленному методу Ньютона, всегда сходятся, если начальное приближение $(x^{(0)})$ выбрано достаточно близко к решению. При этом метод Ньютона дает быструю, квадратичную сходимость, а огрубленный метод — сходимость со скоростью геометрической прогрессии. Для справедливости этих утверждений снова нужно предположить, что решение $x = a$ является невырожденным: определитель

$$\det(f_{ik}) \neq 0, \quad f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a).$$

(Для случая одного уравнения это есть условие $f'(a) \neq 0$). Далее. Последовательные приближения по методу Ньютона снова можно рассматривать как решение итерациями эквивалентной системы. Именно. Обозначим решение линейной системы

$$f'(x) \cdot \Delta x = -f(x) \quad \text{так:} \quad \Delta x = -[f'(x)]^{-1} f(x).$$

Тогда мы можем записать последовательные приближения по методу Ньютона в виде, аналогичном формуле (1):

$$x^{(s+1)} = g(x^{(s)}); \quad g(x) = x - \left(\frac{df}{dx}(x) \right)^{-1} \cdot f(x) ** \quad (9)$$

15. Итерации в системах

Итак, снова возникает вопрос о сходимости итераций:

$$x^{(s+1)} = g(x^{(s)}). \quad (10)$$

Качественный ответ может быть таким.

Для сходимости итераций (10) достаточно, чтобы частные производные $\frac{\partial g_i}{\partial x_k}$ были малы. Существует несколько

* Если необходимо вычислить несколько (скажем, больше трех) приближений, то при использовании огрубленного метода Ньютона можно еще «экономить» на решении линейных систем (см. предыдущую лекцию).

** Буквально прочитанная формула (9) требует вычисления обратной матрицы и умножения ее на вектор. Подчеркнем, однако, еще раз, что необходимым является лишь решение линейной системы, а не обращение матрицы.

способов, как уточнить это утверждение. Один из вариантов дает следующая теорема.

Теорема

Пусть известно:

- 1) уравнение $x = g(x)$ имеет решение $x = a$;
- 2) для любых 2 векторов u и v выполняются условия

$$\|g(u) - g(v)\| \leq q \|u - v\|, \quad q < 1. \quad (11)$$

(Здесь $\|c\|$ — длина вектора c). Тогда последовательность $x^{(s)}$, определенная формулой $x^{(s+1)} = g(x^{(s)})$, при любом $x^{(0)}$ сходится к a .

Уточнение

Как и для одного уравнения, достаточно потребовать выполнения условия (11) в некоторой окрестности a ($\|x - a\| < \delta$). Утверждение теоремы остается верным, если $x^{(0)}$ лежит в этой окрестности.

Доказательство — почти очевидно:

$$\|x^{(k+1)} - a\| = \|g(x^{(k)}) - g(a)\| \leq q \|x^{(k)} - a\| \leq C q^k \rightarrow 0.$$

Видно, что имеет место сходимость не хуже, чем со скоростью геометрической прогрессии; чем меньше q , тем быстрее будет сходимость.

Замечание

Условие (11) имеет простой геометрический смысл. Будем рассматривать векторную функцию $y = g(x)$ как отображение, переводящее каждый вектор x в некоторый вектор y . Тогда (11) означает, что при отображении g расстояние между векторами уменьшается; или, говорят, отображение g — сжимающее.

Посмотрим, как можно проверить условие (11). Для этого оценим $g(u) - g(v)$ покомпонентно:

$$|g_i(u) - g_i(v)| \leq M_i \|u - v\|,$$

где $M_i = \max \|\text{grad } g_i\|$ **. Значит

$$\|g(u) - g(v)\| = \left[\sum (g_i(u) - g_i(v))^2 \right]^{1/2} \leq (\sum M_i^2)^{1/2} \|u - v\|.$$

Если $M = \max M_i$, то

$$\|g(u) - g(v)\| \leq M \sqrt{n} \|u - v\|.$$

* Для одного уравнения условие (11) есть $|g(u) - g(v)| \leq q |u - v|$; см. п. 9.

** Действительно, производная функции по любому направлению не превосходит длины ее градиента.

Итак, если для всех g_i $\|\text{grad } g_i\| \leq q/\sqrt{n}$ ($q < 1$), то гарантирована сходимость итераций $x^{(s+1)} = g(x^{(s)})$ со скоростью геометрической прогрессии q^s . Величину $\text{grad } g_i$ легко оценить через частные производные g_i^* ; мы получим тогда достаточное условие сходимости, требующее некоторой малости всех частных производных $\frac{\partial g_i}{\partial x_k}$. Для $n=1$ оно совпадает с условием $|g'(x)| \leq q < 1$. Однако на этом аналогия с одним уравнением кончается! Для одного уравнения условие $|g'(x)| < 1$ является по существу необходимым и достаточным для сходимости итераций (более точно: необходимо для сходимости условие $|g'(x)| \leq 1$). Для системы это не так: итерации могут сходиться, несмотря на то, что некоторые из производных будут очень велики!

16. Процесс итераций в линейном приближении

Предполагая, что $x^{(s)}$ мало отличается от a , заменим $g(x)$ на линейную функцию $l(x)$. Тогда

$$x^{(s+1)} = g(x^{(s)}) \approx a + A(x^{(s)} - a), \quad a = \frac{dg}{dx}(a).$$

Обозначив $r^{(s)} = x^{(s)} - a$, получим (в том же приближении) простую формулу:

$$\bar{r}^{(s+1)} = Ar^{(s)}$$

или

$$r^{(s)} = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_s \cdot r^{(0)} = A^s \cdot r^{(0)}.$$

Итак, в этом приближении вопрос сводится к поведению степеней матрицы A . Оказывается, поведение последовательности $r^{(s)} = A^s r^{(0)}$ определяют собственные значения и собственные векторы матрицы A , а не непосредственно величина ее элементов. Вполне может случиться, что некоторые элементы A велики, но процесс итераций быстро сходится. Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 1000 \\ 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

уже на третьем шаге получим $\bar{r}^{(3)} = 0$ (у этой матрицы все три собственные значения равны 0). Возвращаясь к общему случаю, предположим для простоты, что матрица A имеет n ве-

* $\|\text{grad } g\| \leq \sqrt{n} \cdot \max_k \left| \frac{\partial g}{\partial x_k} \right|$.

ественных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и соответствующих им собственных векторов $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$. Возьмем некоторый исходный вектор r и разложим его по собственным векторам: $r = \sum c_k e^{(k)}$. Применим A :

$$Ar = \sum_k c_k A e^{(k)} = \sum_k \lambda_k c_k e^{(k)}.$$

Аналогично для A^s :

$$A^s r = \sum_{k=1}^n \lambda_k^s c_k e^{(k)}. \quad (12)$$

Формула (12) при всей ее простоте содержит богатую информацию. Из нее видно, в частности, что для стремления к нулю *достаточно* выполнения условия

$$|\lambda_k| < 1; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Условие (13) является *необходимым*, если мы хотим, чтобы $A^s r \rightarrow 0$ при *любом* r . (Действительно, при $r = e^{(k)}$ $A^s r = \lambda_k^s e^{(k)}$). Можно показать, что условие (13) сохраняет свою силу и в общем случае, при наличии комплексных (и кратных) собственных значений. Более точно, справедлива следующая теорема.

Для того, чтобы итерации $x^{(s+1)} = Ax^{(s)} + b$ при произвольном $x^{(0)}$ стремились к пределу*, необходимо и достаточно, чтобы для всех собственных значений матрицы A выполнялось неравенство $|\lambda(A)| < 1$.

З а к л ю ч и т е л ь н ы е з а м е ч а н и я

П о с л е д о в а т е л ь н ы е п р и б л и ж е н и я д л я р е ш е н и я л и н е й н ы х с и с т е м

До сих пор мы говорили о последовательных приближениях для решения нелинейных систем, предполагая, что линейные системы мы можем, если понадобится, решить каким-нибудь *прямым* методом (типа метода исключения).

Однако очень большие системы линейных уравнений тоже часто приходится решать последовательными приближениями. Это есть отдельная большая тема для будущего. Пока я замечу только, что проблема состоит не в том, чтобы построить сходящийся процесс последовательных приближений**, а в том, чтобы приближения сходились *достаточно быстро*.

Для случая, когда последовательные приближения сводятся

* Очевидно, этот предел a будет решением системы $a = Aa + b$.

** Такой процесс для любой (невыврожденной) линейной системы можно построить.

к простым итерациям $x^{(s+1)} = Ax^{(s)} + b$, скорость сходимости (при наличии полной системы собственных векторов) указывает формула (12). Именно, если $|\lambda_k| \leq q < 1$, то разность $x^{(s)} - a$ убывает при $s \rightarrow \infty$ не хуже геометрической прогрессии Cq^s *. На самом деле, формула (12) дает больше: она указывает механизм сходимости. Поэтому часто эта же формула может подсказать, как ускорить сходимость. Ограничимся одним примером. Пусть все $|\lambda_k| < 0,8$, кроме $|\lambda_1|$, близкого к 1 (скажем, $\lambda_1 = 0,9999$). Тогда после 20—40 итераций все компоненты $r^{(s)}$, кроме компоненты $c_1 \lambda_1^s$ вдоль $e^{(1)}$, будут малы. При дальнейших итерациях мы будем очень медленно двигаться «по направлению $e^{(1)}$ »:

$$x^{(s+1)} - x^{(s)} = r^{(s+1)} - r^{(s)} \approx (\lambda_1^{s+1} - \lambda_1^s) c_1 e^{(1)}.$$

Ясно, что это неразумно: нужно сразу совершить большой шаг в этом направлении. Практически можно поступить так. Возьмем вектор $u = x^{(40)} - x^{(30)}$ и положим $\tilde{x} = x^{(30)} + \alpha u$; постоянную α выберем так, чтобы сделать минимальным $\tilde{x} - (A\tilde{x} + b)$. Один такой шаг может заменить несколько десятков или даже сотен итераций по формуле

$$x^{(s+1)} = Ax^{(s)} + b !$$

* Это утверждение нуждается в уточнении в нескольких пунктах. Один из них: $\|x^{(s)} - a\|$ в начале может даже возрастать.