Отдельный оттиск

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТОМ
XXXII
ВЫПУСК
1(193)

1977

О ФИНИТНОСТИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

В. Ю. Лунин

Мы изучим поведение при $\varepsilon \to 0^+$ решения $u_\varepsilon(x)$ краевой задачи:

$$\varepsilon^p \mathcal{T}_{2m}(u) + \mathcal{T}_{2m-2}(u) = 0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial \mathbf{n}^s}\right|_{\partial G} = 0 \qquad (s = 0, \ldots, m-1), \tag{2}$$

рассматриваемой в ограниченной области $G \subset \mathbf{R}^n$ с границей класса C^{m+2}. Здесь $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малый параметр, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к границе области G.

Если в уравнении (1) $\mathcal{T}_{2m}(u)$ и $\mathcal{T}_{2m-2}(u)$ — линейные эллиптические операторы порядка $2m$ и $2m-2$ соответственно, то известно (см. [1]), что главный при $\varepsilon \to 0^+$ член асимптотики решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (1) — (2) имеет вид

$$\widetilde{u}_\varepsilon(x) = h(x) + \varepsilon^{m-1} U(\varepsilon, x). \tag{3}$$

Здесь $h(x)$ — решение краевой задачи для вырожденного уравнения

$$\mathcal{T}_{2m-2}(h) = 0, \qquad \left.\frac{\partial^s h}{\partial \mathbf{n}^s}\right|_{\partial G} = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \ldots, m-2; \tag{4}$$

$U(\varepsilon, x)$ — удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial \mathbf{n}^{m-1}} [h(x) + \varepsilon^{m-1} U(\varepsilon, x)]\,|_{\partial G} = 0, \tag{5}$$

и экспоненциально убывает при $\varepsilon \to 0^+$ во внутренних точках области G. В локальных координатах $(\rho, \varphi) = (\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, связанных с границей (см. [1]), имеем:

$$U(\varepsilon, x) = v\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho, \varphi\right). \tag{6}$$

При этом функция $v(t, \varphi)$, определяемая как решение краевой задачи на полуоси $[0, +\infty]$ для обыкновенного дифференциального уравнения, зависящего от параметров $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, экспоненциально убывает при $t \to +\infty$.

Оказывается, что если $\mathcal{T}_{2m}(u)$ и $\mathcal{T}_{2m-2}(u)$ — квазилинейные операторы:

$$\mathcal{T}_{2m}(u) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \delta u, D^m u), \tag{7}$$

$$\mathcal{T}_{2m-2}(u) = \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha(x, \delta u) \tag{8}$$

(здесь $D^\nu u = \dfrac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}}$ для $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $D^k n = \{D^\nu u : |\nu| = k\}$ для целого k, $\delta u = \{D^k u:\ 0 \leqslant k \leqslant m-1\}$), то главный член асимптотики решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (1) — (2) можно по-прежнему представить в виде (3). Однако при этом может случиться, что функция $v(t, \varphi)$, определяющая пограничный слой согласно равенству (6), имеет компактный носитель, т. е. поправка $u(\varepsilon, x)$ тождественно равна нулю вне области меры $O(\varepsilon)$, примыкающей к границе.

Мы будем предполагать относительно функций, входящих в выражения (7) и (8), что A_α — один раз, а B_α — m раз непрерывно дифференцируемы по своим аргументам, причем

$$|A_\alpha(x, \xi, \eta)| \leqslant C(1 + |\xi|^{p-1} + |\eta|^{p-1}) \quad \text{для} \quad |\alpha| \leqslant m,$$

$$|B_\alpha(x, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi|^{q-1}) \quad \text{для} \quad |\alpha| \leqslant m-1.$$

Здесь $p > 2$ и $2 \leqslant q \leqslant p$ — фиксированные для данной задачи параметры, $\xi_\nu = \xi_{\nu_1 \ldots \nu_n}$, $\xi^k = \{\xi_\nu : |\nu| = k\}$ для целого k, $\xi = \{\xi^k : 0 \leqslant k \leqslant m-1\}$, $\eta = \xi^m$

Предполагается, что при $|\alpha|=m$ имеем:

$$A_\alpha(x, \xi, \eta)=a_\alpha(x)P_\alpha(\eta)+\widetilde{A}_\alpha(x, \xi, \eta),$$

где $a_\alpha(x)$ — функции класса C^m, $|\widetilde{A}_\alpha(x, \xi, \eta)|\leqslant C(1+|\xi|^{p-1}+|\eta|^{p-1-\sigma})$ с константой $\sigma>0$,

$$P_\alpha(t\eta)=\operatorname{sign} t\cdot|t|^{p-1}P_\alpha(\eta) \quad \text{для} \quad t\in\mathbf{R}^1.$$

Предполагается, наконец, что операторы $\mathcal{T}_{2m}(u)$ и $\mathcal{T}_{2m-2}(u)$ удовлетворяют условию сильной эллиптичности:

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}[A_\alpha(x, \xi, \xi^m)-A_\alpha(x, \xi', \xi^{m\prime})](\xi_\alpha-\xi'_\alpha)\geqslant\gamma^2\sum_{|\alpha|=m}|\xi_\alpha-\xi'_\alpha|^p,$$

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}[B_\alpha(x, \xi)-B_\alpha(x, \xi')](\xi_\alpha-\xi'_\alpha)\geqslant\gamma^2\sum_{|\alpha|=m-1}|\xi_\alpha-\xi'_\alpha|^q,$$

с $\gamma>0$, а также

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m-1}\frac{\partial B_\alpha(x, \xi)}{\partial\xi_\beta}\psi_\alpha\psi_\beta\geqslant\gamma_1^2\sum_{|\alpha|=m-1}\psi_\alpha^2, \quad \gamma_1>0.$$

Выполнение указанных выше условий обеспечивает существование и единственность решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (1) — (2) в классе $\overset{\vee r}{W}{}_p^m(G)$ и решения $h(x)$ задачи (4) в классе $\overset{0}{W}{}_q^{m-1}(G)$. При этом мы будем для простоты предполагать, что $h(x)\in W_p^m(G)$ и $\frac{\partial^{m-1}}{\partial n^{m-1}}h\,|_{\partial G}\neq 0$. Определяя функцию $\widetilde{u}_\varepsilon$ согласно равенствам (3) и (6), требуя обращения в нуль главной при $\varepsilon\to 0^+$ части выражения $\varepsilon^p\mathcal{T}_{2m}(\widetilde{u}_\varepsilon)+\mathcal{T}_{2m-2}(\widetilde{u}_\varepsilon)$ и выполнения условия (5), мы получаем задачу для нахождения функции $v(t, \varphi)$:

$$-\delta(\varphi)\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left(\left|\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\right|^{p-2}\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\right)+\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}g\left(\frac{\partial^{m-1}v}{\partial t^{m-1}}, \varphi\right)=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}v(t, \varphi)\Big|_{t=0}=r_0(\varphi)\equiv(-1)^m\frac{\partial^{m-1}h}{\partial n^{m-1}}\Big|_{\partial G}, \quad \lim_{t\to+\infty}v(t, \varphi)=0. \tag{10}$$

Здесь $\delta(\varphi)\geqslant\delta_0^2>0$, $g'_r(r, \varphi)\geqslant\gamma_1^2>0$.

Можно показать, что задача (9) — (10) имеет при каждом фиксированном φ единственное решение $v(t, \varphi)$ такое, что $v(t, \varphi)\equiv 0$ при $t\geqslant\beta(\varphi)$, где $\beta(\varphi)$ — непрерывная функция φ, $\beta(\varphi)\leqslant\beta_0<+\infty$ и $v(t, \varphi)=O((\beta(\varphi)-t)^{m+\frac{2}{p-2}})$ при $t\to\beta(\varphi)^-$.

При выполнении сформулированных выше условий имеет место

Теорема. *Если $u_\varepsilon(x)$ — решение задачи* (1) — (2), *а функция $\widetilde{u}_\varepsilon(x)$ определена равенствами* (3) *и* (6), *где $v(t, \varphi)$ — решение задачи* (9) — (10), *то*

$$\|u_\varepsilon(x)-\widetilde{u}_\varepsilon(x)\|_{W_p^m(G)}\leqslant C\varepsilon^{\frac{\varkappa}{p}+\frac{1-p}{p}},$$

$$\|u_\varepsilon(x)-\widetilde{u}_\varepsilon(x)\|_{W_q^{m-1}(G)}\leqslant C\varepsilon^{\frac{\varkappa}{q}+\frac{1}{q}}, \quad \text{где} \quad \varkappa=\min\left(1, \frac{\sigma p}{p-1}\right).$$

Поскольку

$$\|\varepsilon^{m-1}U(\varepsilon, x)\|_{W_p^m(G)}=\Theta(\varepsilon^{(1-p)/p}) \quad \text{и} \quad \|\varepsilon^{m-1}U(\varepsilon, x)\|_{W_q^{m-1}(G)}=\Theta(\varepsilon^{1/q}),$$

то из теоремы следует, что $\widetilde{u}_\varepsilon(x)$ является главным членом асимптотики решения задачи (1) — (2).

Автор глубоко благодарен М. И. Вишику и Р. С. Гусаровой за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН **12**: 5 (77) (1957), 3—122.

Поступило в Правление общества 28 июня 1976 г.