Отдельный оттиск

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТОМ
XXIX
ВЫПУСК
3 (177)

1974

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ АБСТРАКТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. Ю. Лунин

1. Рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения

(1) $$x'(t) = A(t)x(t) \qquad (t_0 \leqslant s \leqslant t < \infty),$$

(2) $$x(s) = x_0.$$

Здесь неизвестная функция $x(t)$ действительного переменного t принимает значения в банаховом пространстве E; $A(t)$ — семейство замкнутых линейных операторов в E (вообще говоря, неограниченных) с не зависящей от t областью определения $D(A)$, плотной в E. Следуя [1], ослабленным решением (1) будем называть функцию $x(t)$, непрерывную на $[s, \infty)$, непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую (1) на (s, ∞).

Будем предполагать, что уравнение (1) является абстрактным параболическим (см. [1]). В этом случае можно ввести (см. [1]) эволюционный оператор $U(t, s)$ так, что для любого ослабленного решения задачи (1) — (2) $x(t, s) = U(t, s)x_0$.

Предполагаем также, что при $x_0 \in D(A)$ функция $U(t, s)x_0$ является точным решением (1) — (2).

В работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $A(s)$ при каждом $s \in [t_0, \infty)$ порождает полугруппу $U_s(t)$ класса C_0, аналитическую в некотором секторе, содержащем вещественную полуось $t > 0$, причем*

$$\| U_s(t) \| \leqslant N(s) \exp\{\omega(s) t\}, \quad t \geqslant 0,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} U_s(t) \right\| \leqslant M(s) t^{-1} \exp\{\lambda(s) t\}, \quad t > 0, \quad \omega(s) \leqslant \lambda(s),$$

$$N(s),\ M(s) \in C^1[t_0, \infty), \quad N(s) \geqslant 0, \quad M(s) > 0, \quad \lambda(s) \in C[t_0, \infty).$$

Пусть оператор-функция $A(t)$ сильно непрерывна на $D(A)$; при любом $s \in [t_0, \infty)$ оператор $A(s)$ имеет ограниченный обратный, определенный во всем E, и

$$\|A(t)A^{-1}(s) - I\| \leqslant \beta(t)\gamma(s)(t - s),$$

где $\beta(t)$, $\gamma(t) \in C[t_0, \infty)$, причем $[N(s)M^{-1}(s)\gamma^{-1}(s)]'_s \geqslant 0$.

В таком случае для нормы оператора $U(t, s)$ справедлива оценка

$$\| U(\ , s) \| \leqslant N(s) \exp\left\{ \nu(t, s)(t-s) + \int_s^t M(\tau)\beta(\tau)\gamma(\tau)\, d\tau \right\},$$

где $\nu(t, s) = \sup\limits_{\tau \in [s, t]} \lambda(\tau)$.

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы 1*

$$\varkappa = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \lambda(t) + \overline{\lim_{t \to +\infty}} M(t)\gamma(t)\beta(t);$$

тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся N_ε и T_ε такие, что

$$\|U(t, s)\| \leqslant N_\varepsilon \exp\{(\varkappa + \varepsilon)(t - s)\}, \qquad t \geqslant T_\varepsilon.$$

Следствие 2. *Пусть для эволюционного оператора $U(t, s)$ имеем оценку*

$$\|U(t, s)\| \leqslant N \exp\{\sigma(t - s)\}.$$

Рассмотрим задачу

(3) $$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)), \qquad x(s) = x_0 \qquad (s \leqslant t < \infty),$$

где $f(t, x(t))$ непрерывна по t для любой непрерывной $x(t)$. Одновременно с (3) рассмотрим соответствующее интегральное уравнение

(4) $$x(t) = U(t, s)x_0 + \int_s^t U(t, \tau) f(\tau, x(\tau))\, d\tau,$$

непрерывное решение которого назовем обобщенным решением (3).

Теорема 2. *Пусть отображение* $f(t, x)$: $[s, \infty) \times E \to E$ *таково, что*
1) $\|f(t, x)\| \leqslant g(t, \|x\|)$, $f(t, 0) = 0$, $x \in E$, $t \in [s, T]$, *причем* $g(t, z)$ *не убывает по* z;
2) $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant C(t, a_1, a_2)\|x - y\|$ *для* $t \in [s, T]$, $\|x\| \leqslant a_1$, $\|y\| \leqslant a_2$.
Если при $0 \leqslant \xi_0 \leqslant R$ на $[s, T]$ существует единственное решение задачи

$$\xi(t, \xi_0)'_t = Ne^{-\sigma t} g(t, e^{\sigma t}\xi(t, \xi_0)), \quad \xi(s, \xi_0) = \xi_0,$$

то при $\|x_0\| \leqslant N^{-1}R\, e^{\sigma s}$ на $[s, T]$ существует единственное обобщенное решение $x(t)$ задачи (3) и $\|x(t)\| \leqslant \xi(t, Ne^{-\sigma s}\|x_0\|)$.

Следствие 3. *Пусть*

1) $\| f(t, x) \| \leqslant \alpha(t) \| x \|^{1+r}$, $\alpha(t) \in C[s, \infty)$, $r > 0$, $\int\limits_s^t \alpha(\tau) e^{r\sigma\tau} d\tau < M$,

2) $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant C(T, a_1, a_2)\|x - y\|$, $t \in [s, T]$, $\|x\| \leqslant a_1$, $\|y\| \leqslant a_2$.

Тогда при $\|x_0\| < (rMN^{1+r})e^{\sigma s}$ существует единственное обобщенное решение $x(t)$ задачи (3) на полуоси $[s, \infty)$ и

$$\| x(t) \| \leqslant N \| x_0 \| e^{\sigma(t-s)} \left[1 - rN^{1+r} \| x_0 \|^r \int\limits_s^t \alpha(\tau) e^{r\sigma(\tau - s)} d\tau \right]^{-1/r}. \tag{5}$$

Замечание 1. Из оценки (5) следует устойчивость по Ляпунову тривиального решения задачи (3) в случае $\sigma = 0$ и экспоненциальная устойчивость при $\sigma < 0$.

Замечание 2. Случай $r = 0$ рассматривался в [2].

В заключение выражаю глубокую благодарность Р. С. Гусаровой, под руководством которой была написана данная работа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., «Наука», 1970.

[2] Ю. И. Домшлак, О поведении на бесконечности решений эволюционного уравнения с неограниченным оператором при наличии нелинейного возмущения, Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-матем. и техн. н., № 1 (1962), 3—14.

Поступило в Правление общества 12 января 1973 г.