

Взаимодействие неустойчивостей кровеносного сосуда

Кузин А.А.¹, Кузин Р.А.², Тимербулатов Ш.В.³, Улемаева С.А.⁴, Хакимов А.Г.⁵

¹ГБУЗ РБ ГКБ № 8, Уфа, Россия

²ГБУЗ РБ МИАЦ, Уфа, Россия

³БГМУ, Уфа, Россия

⁴ГБУЗ РКПТД, Уфа, Россия

⁵ИМех УФИЦ РАН, Уфа, Россия

hakimov@anrb.ru

В гидроупругих системах может иметь место одновременное проявление упругих и гидродинамических неустойчивостей и их взаимодействие. Рассматривается взаимное влияние изгиба кровеносного сосуда, внутреннего и внешнего давления, действия сжимающей силы и течения крови с заданной плотностью по кровеносному сосуду. Тонкий упругий кровеносный сосуд "закреплен" на защемленных скользящих опорах, причем, опоры не препятствуют течению крови внутри кровеносного сосуда вдоль его оси. На "опорах" прогиб и угол поворота равны нулю. Принимается, что упругий кровеносный сосуд является тонкостенным, а идеальные жидкости внутри и вне кровеносного сосуда несжимаемы, поверхностное натяжение в них отсутствует. Кровеносный сосуд подвержен продольному сжатию. Малость инерционных сил обуславливается относительно медленным изменением возмущений при медленном изменении внешних воздействий (сил сжатия кровеносного сосуда, гидростатических сил, скорости движения крови в кровеносном сосуде). Внешние воздействия могут быть как независимыми друг от друга, так и связанными. Статическое взаимное влияние указанных неустойчивостей называется взаимодействием неустойчивостей кровеносного сосуда. Получены линеаризованное уравнение изгиба кровеносного сосуда и критическое значение сжимающей кровеносный сосуд силы, которое представляет собой обобщение классического критического значения сжимающей кровеносный сосуд силы в задаче Эйлера за счет действия давлений внутри и вне кровеносного сосуда, движения крови внутри кровеносного сосуда. Изучено статическое взаимодействие неустойчивостей в зависимости от сжимающей кровеносный сосуд силы, внутреннего и внешнего давления, скорости движения крови. Найдены области изменения этих параметров, когда происходят стабилизация и дестабилизация прямолинейной формы. Изгибная жесткость кровеносного сосуда, растягивающие силы, внешнее гидростатическое давление стабилизируют, а сжимающие силы, внутреннее гидростатическое давление, движение крови с любой скоростью внутри кровеносного сосуда дестабилизируют его.

Ключевые слова: кровеносный сосуд, давление, сжимающая сила, взаимодействие, неустойчивость.

Instability Interactions of Blood Vessel

Kuzin A.A.¹, Kuzin R.A.², Timerbulatov Sh.V.³, Ulemaeva S.A.⁴, Khakimov A.G.⁵

¹SBIH RB CCH No. 8, Ufa, Russia

²SBIH RB MIAC, Ufa, Russia

³BSMU, Ufa, Russia

⁴SBIH RCATC, Ufa, Russia

⁵Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Hydroelastic systems can be characterized by the simultaneous manifestation of elastic and hydrodynamic instabilities and their interaction. Consideration is given to mutual effects of blood vessel bending, internal and external pressures, action of the compression force and fluid with a set density flowing along the blood vessel. A thin elastic blood vessel is "fixed" on clamped sliding supports. In this case the "supports" do not hinder the flow of fluid travelling inside the blood vessel along its axis. On the supports, the blood vessel bending and rotation angle equal to zero. It is assumed that the elastic blood vessel has thin walls and ideal fluids found in and out of the blood vessel are

incompressible with no surface tension. The blood vessel is subjected to the longitudinal compression. The smallness of inertial forces is conditioned by a relatively slow change of disturbances under slowly changing external effects (compressive forces in the blood vessel, hydrostatic forces, velocity of fluid motion in the blood vessel). External effects can be both independent and interconnected with each other. Here, the static mutual influence between those instabilities is called the instability interaction in a blood vessel. We have obtained the linearized equation of the blood vessel bend and the critical value of the force that squeezes the blood vessel, which represents a generalization of the classical critical value for the static longitudinal compressive force acting on the blood vessel in the Euler problem due to the action of pressures inside and outside the blood vessel and the fluid motion inside the blood vessel. The investigation is focused on static instability interactions depending on the compression force in the blood vessel, internal and external pressures and fluid velocity. The domains of change for these parameters are determined with the occurrence of stabilization and destabilization of the rectilinear shape. Bending rigidity, tensile forces and external hydrostatic pressure stabilize the blood vessel. By contrast, compressive forces, internal hydrostatic pressure and fluid movement inside the blood vessel at any velocity have a destabilizing effect.

Key words: blood vessel, pressure, compressive force, interaction, instability.

1. Введение

В гидроупругих системах может иметь место одновременное проявление упругих и гидродинамических неустойчивостей и их взаимодействие. Вопросам статического и динамического поведения продольно сжатого упругого элемента, контактной границы жидкостей с разными плотностями и скоростями движения посвящены многочисленные исследования. Укажем лишь на первоисточники [1–4] и на некоторые монографические и обзорные работы [5–8].

Теория статической неустойчивости тонкостенных оболочек и пластин получила сильное развитие в связи с созданием объектов надводного и подводного флота, нефтехимии, аэрокосмической техники, а неустойчивости контактной границы жидкостей – для объяснения некоторых природных явлений и описания процессов в технических системах.

Малость инерционных сил обуславливается относительно медленным изменением возмущений при медленном изменении внешних воздействий (сил сжатия трубопровода, гидростатических сил, скорости движения жидкости в трубопроводе). Взаимодействие гидродинамических неустойчивостей с учетом капиллярных сил впервые было рассмотрено в [3]. В дальнейшем были учтены сжимаемость и вязкость жидкостей, вихреобразование и другие нелинейные эффекты [8]. В [9, 10] рассматривается взаимное влияние изгиба пластины и волнообразования контактирующих по обеим ее поверхностям жидкостей с разными плотностями. Пластина подвергается в своей плоскости действию сжимающей силы. Система находится в поле ускорения, направленного по нормали к плоскости пластины. Принимается, что упругая пластина является тонкой, идеальные жидкости несжимаемы, поверхностное натяжение в них отсутствует. Дается классификация взаимодействий статических неустойчивостей Эйлера и Рэлея, динамических

неустойчивостей Лаврентьева–Ишлинского и Рэлея–Тейлора, а также взаимодействие неустойчивостей Кониинга–Тауба и Рихтмайера–Мешкова. Внешние воздействия могут быть как независимыми друг от друга, так и связанными. Здесь же приводится обзор работ по теме. В [11, 12] рассматривается взаимное влияние изгиба трубопровода, внутреннего и внешнего давления, действия сжимающей силы и течения жидкости с заданной плотностью по трубопроводу. Принимается, что упругий трубопровод является тонкостенным, а идеальные жидкости внутри и вне трубопровода несжимаемы, поверхностное натяжение в них отсутствует. Изучено статическое взаимодействие неустойчивостей в зависимости от сжимающей трубопровод силы, внутреннего и внешнего давления, скорости движения жидкости.

Если от технических систем перейти к живым системам, то кровеносные сосуды, капилляры представляют собой тоже трубопроводы с мини-, микро- диаметрами и малыми значениями модуля упругости стенок сосудов [13, 14]. Здесь статическое взаимное влияние указанных неустойчивостей называется взаимодействием неустойчивостей кровеносного сосуда. На основе полученных результатов по взаимодействию неустойчивостей трубопровода исследуется аналогичное взаимодействие неустойчивостей кровеносного сосуда. Кровеносный сосуд находится под действием внутреннего давления крови с заданной плотностью и движущейся с заданной скоростью. Также имеется давление среды, мышц вне кровеносного сосуда. В стенках сосуда вдоль его оси действуют сжимающие или растягивающие усилия.

2. Постановка задачи

Будем считать, что тонкий упругий кровеносный сосуд "закреплен" на защемленных скользящих "опорах", расположенных на расстоянии L друг от друга, причем "опоры" не препятствуют течению крови с плотностью ρ_i и скоростью U_i внутри

кровеносного сосуда вдоль его оси. Вне кровеносного сосуда находится покоящаяся среда с плотностью ρ_e . На "опорах" прогиб и угол поворота равны нулю. Используются допущения о несжимаемости срединной линии кровеносного сосуда, идеальности и несжимаемости жидкостей. Кровеносный сосуд расположен горизонтально и подвержен продольному сжатию силой P . Если рассматривать поведение кровеносного сосуда в области нескольких "пролетов" (например, $-L < x < L$), то способ приложения силы к кровеносному сосуду и создания течения крови внутри кровеносного сосуда можно не конкретизировать [9, 10].

Сила P , давления внутри и вне кровеносного сосуда p_i , p_e и скорость U_i изменяются независимо друг от друга. Интенсивность их возрастания от нуля будем считать такой, чтобы инерционные силы в системе были малы. При $P = 0$, $G = 0$, $U_i = 0$, $p_i = 0$, $p_e = 0$ кровеносный сосуд имеет малое отклонение от оси x в виде

$$w_0 = W_{0n} \sin^2 n\beta x, \quad \beta = \pi/L, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

При этом напряжения в нем отсутствуют, например, в результате длительной эксплуатации кровеносного сосуда. Сумма проекций на вертикальную ось z всех сил, действующих на элемент длиной dx , равна

$$\begin{aligned} & Q \cos \alpha - (Q + dQ) \cos(\alpha + d\alpha) + P \sin \alpha - P \sin(\alpha + d\alpha) + \\ & + [p_i F_i - p_e (F + F_i)] \sin \alpha - [p_i F_i - p_e (F + F_i)] \sin(\alpha + d\alpha) + \\ & + G(\rho F + \rho_i F_i) dx - G\rho_e (F + F_i) dx - q dx - \rho_i U_i^2 k dx = 0, \end{aligned}$$

где Q – перерезывающая сила, q – интенсивность распределенной выталкивающей силы, k – кривизна осевой линии кровеносного сосуда, ρ , h , F – плотность, толщина стенки и площадь поперечного сечения кровеносного сосуда, F_i – площадь сечения в свету кровеносного сосуда. Давления внутри и вне кровеносного сосуда определяются по формулам

$$\begin{aligned} p_i &= p_{i0} + G\rho_i (w_0 + w), \quad p_e = p_{e0} + G\rho_e (w_0 + w), \\ p_{e0} &= p_0 + G\rho_e H. \end{aligned}$$

Здесь p_0 – давление на поверхности жидкости на высоте H от кровеносного сосуда, p_{i0} , p_{e0} – давления крови внутри и среды вне кровеносного сосуда в расчетном положении. Из уравнения моментов в том же приближении следует $Q dx - dM = 0$, где в выражение изгибающего момента $M = D d^2 w / dx^2$ не входит w_0 ввиду указанного выше предположения об отсутствии напряжений до начала внешних воздействий. Принимая в линейной задаче $\cos \alpha = 1$, $\sin(\alpha + d\alpha) = \alpha + d\alpha$ и учитывая $\alpha = d(w_0 + w)/dx$, $d\alpha = (d^2(w_0 + w)/dx^2) dx$, получаем уравнение изгиба кровеносного сосуда относительно текущего прогиба $w(x)$:

$$\begin{aligned} & D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \{P + [p_{i0} + G\rho_i (w_0 + w)] F_i\} \frac{d^2 (w_0 + w)}{\partial x^2} - \\ & - \{[p_{e0} + G\rho_e (w_0 + w)] (F + F_i) + \rho_i F_i U_i^2\} \frac{d^2 (w_0 + w)}{\partial x^2} = \\ & = G(\rho F + \rho_i F_i) - G\rho_e (F + F_i) - q, \\ & D = EJ, \quad F_i = \pi R_i^2, \quad F = \pi [(R_i + h)^2 - R_i^2], \\ & J = \pi [(R_i + h)^4 - R_i^4] / 4, \end{aligned}$$

где E , R_i – модуль упругости, радиус внутреннего сечения кровеносного сосуда. В состоянии равновесия

$$G(\rho F + \rho_i F_i) - G\rho_e (F + F_i) - q = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & D \frac{d^4 w}{dx^4} + [P + p_{i0} F_i - p_{e0} (F + F_i) + \rho_i F_i U_i^2] \times \\ & \times \frac{d^2 (w_0 + w)}{dx^2} = \\ & = G[-\rho_i F_i + \rho_e (F + F_i)] (w_0 + w) \frac{d^2 (w_0 + w)}{dx^2}. \end{aligned}$$

Линеаризованное уравнение записывается

$$\begin{aligned} & D \frac{d^4 w}{dx^4} + [P + p_{i0} F_i - p_{e0} (F + F_i) + \rho_i F_i U_i^2] \times \\ & \times \frac{d^2 (w_0 + w)}{dx^2} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

3. Изгиб кровеносного сосуда

Примем частное решение уравнения (2) в виде

$$w = W_n \sin^2 n\beta x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Подставляя (1), (3) в уравнение (2), получаем отношение амплитуды текущего прогиба к амплитуде начального прогиба в виде

$$\begin{aligned} \frac{W_n}{W_{0n}} &= \frac{R_n}{P_E (n^2 \beta)^2 - R_n}, \quad P_E = 4D\beta^2 = \frac{4\pi^2 EJ}{L^2}, \\ R_n &= [P + p_{i0} F_i - p_{e0} (F + F_i) + \rho_i F_i U_i^2] (n\beta)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь P_E – критическое значение статической продольной сжимающей силы на кровеносный сосуд ($n = 1$). Из (4) видно, что прогиб тем больше, чем больше величины P , p_{i0} , $\rho_i U_i^2$ и меньше P_E , p_{e0} .

При

$$R_n = P_E (n^2 \beta)^2 \quad (5)$$

прогиб в рассматриваемом линейном приближении растет неограниченно. Здесь R_n представляет собой критическую комбинацию внешних воздействий P , p_{i0} , p_{e0} , $\rho_i U_i^2$ для системы с заданными параметрами материалов и размерами E , ρ_i , h , L , R_i . С возрастанием внешних воздействий рост прогиба (4) происходит наиболее быстро при $n = 1$. Указанная критическая комбинация внешних воздействий по (4) является минимальной при $n = 1$.

4. Частные случаи

Ввиду большого количества входных параметров может быть выделено множество частных случаев, представляющих самостоятельное значение. Рассмотрим некоторые из них.

1. Из (4) получаем критическое значение сжимающей кровеносный сосуд силы

$$P_{cr} = P_E n^2 - p_{i0} F_i + p_{e0} (F + F_i) - \rho_i F_i U_i^2, \quad (6)$$

которое представляет собой обобщение классического критического значения в задаче Эйлера за счет учета давлений внутри и вне кровеносного сосуда p_{i0} , p_{e0} , скоростного напора внутри кровеносного сосуда $\rho_i U_i^2$. Видно, что увеличение давления и скоростного напора внутри кровеносного сосуда p_{i0} , $\rho_i U_i^2$ и уменьшение внешнего давления p_{e0} приводят к уменьшению критического значения силы P .



Рис. 1. Искривление кровеносных сосудов на руке.

2. При $P = p_{e0} = \rho_i U_i^2 = 0$ из (4) получаем критическое значение внутреннего давления p_{i0} [15, 16]

$$p_{i0cr} = P_E n^2 / F_i.$$

В примере [16] показано, что под действием внутреннего давления трубка теряет устойчивость так же, как под действием критической сжимающей силы Эйлера, хотя сжимающая трубку сила равна нулю. Почему происходит потеря устойчивости в этом случае пояснено в [15]. Чаще всего искривление кровеносного сосуда связывается с варикозным расширением.

3. При $P = p_{e0} = 0$ из (4) получаем критическую комбинацию плотности ρ_i , давления p_{i0} и скорости движения U_i крови, при которой отклоненная от прямолинейной форма является состоянием равновесия, которая равна [17, 18]

$$\left(P_{i0} + \rho_i U_i^2 \right)_{cr} = \frac{P_E}{F_i} = \frac{4\pi^2 D}{F_i L^2} = \frac{4\pi D}{R_i^2 L^2}.$$

4. При $p_{i0} = p_{e0} = 0$ из (4) получаем критическое значение силы P

$$P_{cr} = P_E n^2 - \rho_i F_i U_i^2.$$

5. В случае однородной покоящейся жидкости ($U_i = 0$) из (4) следует

$$\left[p_{i0} F_i - p_{e0} (F + F_i) \right]_{cr} = P_E n^2 - P.$$

6. При $p_{i0} = 0$ и однородной покоящейся жидкости $U_i = 0$ из (4) следует критическое отрицательное давление вакуума вне кровеносного сосуда

$$-p_{e0cr} = (P_E n^2 - P) / (F + F_i).$$

7. Из (4) следует критическое значение скоростного напора внутри кровеносного сосуда

$$\left(\rho_i F_i U_i^2 \right)_{cr} = P_E n^2 - P - p_{i0} F_i + p_{e0} (F + F_i).$$

8. Если кровеносный сосуд подвержен всестороннему давлению жидкости и $U_i = p_{i0} = P = 0$, то $p_{e0} = p_0 + Gr_e H$. Поэтому согласно (6) имеет место абсолютная устойчивость начальной формы кровеносного сосуда при любом значении давления окружающей однородной жидкости ($W_{0n} + W_n < W_{0n}$)

$$W_{0n} + W_n = W_{0n} P_E / [(P_E + p_{e0} (F + F_i)) n^2].$$

Таким образом, при увеличении внешнего гидростатического давления кровеносный сосуд выпрямляется, причем в наибольшей мере по гармонике $n = 1$.

9. Если изгибная жесткость трубки $D = 0$, то трубка не может работать на сжатие. При выполнении условия $p_{i0} > p_{e0}$ трубка не сминается. Отметим, что для капилляров изгибная жесткость D стремится к нулю.

Полученные результаты позволяют анализировать устойчивость трубопроводных систем и тонкостенных трубок и, в частности, кровеносных сосудов. Учет взаимодействия

неустойчивостей кровеносного сосуда, крови и среды вне сосуда позволяет выявить важные свойства гидроупругой системы в рамках принятой модели. В частных случаях получаются обобщения критериев Эйлера, Гельмгольца и их парных взаимодействий для кровеносного сосуда. В целом изгибная жесткость кровеносного сосуда, растягивающие силы, внешнее гидростатическое давление стабилизируют, а сжимающие силы, действующие вдоль оси сосуда, внутреннее гидростатическое давление, движение крови с любой скоростью внутри кровеносного сосуда дестабилизируют его. Динамическое взаимодействие рассмотренных неустойчивостей представляет собой предмет отдельного исследования.

5. Примеры

На рисунке 1 приводится форма сосудов на руке. Состояние сердечно-сосудистой системы человека при различных уровнях внутрисосудистого декомпрессионного газообразования после повторных воздействий повышенного давления воздуха исследуется в [19].

6. Обсуждение

Здесь изучается продольная устойчивость кровеносного сосуда и взаимодействие его неустойчивостей. Представляет интерес также неустойчивость кровеносного сосуда в радиальном направлении, выражающаяся, например, в варикозном расширении вен. Критические параметры мягкой цилиндрической оболочки рассмотрены, в частности, в [14], где получено, что критический радиус деформированной цилиндрической мягкой оболочки равен двум радиусам недеформированной оболочки.

7. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00150.

8. Список литературы

1. Эйлер Л. *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле*. М.–Л.: Гостехиздат, 1934. 600 с.
2. Helmholtz H. On discontinuous fluid motions. *Phil. Mag. Series 4*. 1868. V. 36. P. 337–346.
3. Kelvin W. Hydrokinetic solutions and observations. *Phil. Mag. Series 4*. 1871. V. 42. P. 362–377.
4. Rayleigh J.W.S. Investigations on the character of the equilibrium of an incompressible fluid of variable density. *Proc. London Math. Soc.* 1883. V. 14. P. 170–177.
5. Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. М.: Наука, 1967. 984 с.
6. Kull H.J. *Phys. Reports*. 1991. V. 206. № 5. P. 197–325.
7. Лебо И.Г., Тишкин В.Ф. *Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза методами математического моделирования*. М.: Физматлит, 2006. 304 с.
8. Drazin H.G. *Introduction to Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 2002. 288 p. doi: [10.1017/CBO9780511809064](https://doi.org/10.1017/CBO9780511809064).
9. Ильгамов М.А. Взаимодействие неустойчивостей в гидроупругой системе. *ПММ*. 2016. Т. 80. № 5. С. 566–579.
10. Ильгамов М.А. Взаимодействие неустойчивостей Эйлера, Гельмгольца, Релея. *ЖТФ*. 2018. Т. 63. № 2. С. 163–167.
11. Хакимов А.Г. Взаимодействие неустойчивостей трубопровода. В: *Материалы Международной научной конференции, 25–29 июня 2018 г., г. Стерлитамак*. Под ред. К.Б. Сабитова. Уфа: РИЦ БашГУ, 2018. Т. II. С. 270–272.
12. Хакимов А.Г. Взаимодействие неустойчивостей трубопровода. В: *Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций: сборник материалов XII Международной конференции, Екатеринбург, 21–25 мая 2018 г.* Екатеринбург: ИМАШ УрО РАН, 2018. С. 418.
13. Березовский В.А., Колотилов Н.Н. *Биофизические характеристики тканей человека*. Киев: Наук. думка, 1990. С. 224.
14. Кузин А.А., Хакимов А.Г., Юхин Г.П. *Моделирование напряженно-деформированного состояния мягкой оболочки (грыжи)*: препринт Института механики УНЦ РАН. Уфа: Институт механики УНЦ РАН, 1998. 32 с.
15. Ilgamov M.A. *Static Problems of Hydroelasticity*. М.: Fizmatlit, 1998. 208 p.
16. Феодосьев В.И. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*. М.: Наука, 1973. 400 с.
17. Ильгамов М.А. *Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ*. М.: Наука, 1969. 184 с.
18. Ильгамов М.А. Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления. *Изв. РАН, МТТ*. 2017. № 6. С. 1–14.
19. Мясников А.А., Зверев Д.П., Шитов А.Ю., Чернов В.И., Андрусенко А.Н. Состояние сердечно-сосудистой системы человека при различных уровнях внутрисосудистого декомпрессионного газообразования после повторных воздействий повышенного давления воздуха. *Экология человека*. 2008. № 6. С. 19–23.