ЛЕКЦИЯ 7

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ *

1. Предварительные замечания

Название этой темы требует некоторых пояснений. Мы не будем заниматься общими краевыми задачами для систем дифференциальных уравнений — они гораздо труднее, чем задача Коши. Даже для одного уравнения второго порядка, если оно нелинейно, краевая задача может оказаться очень трудной. Мы ограничимся поэтому линейными дифференциальными уравнениями. При этом все основные идеи хорошо видны уже на примере одного дифференциального уравнения 2 порядка. Его мы и рассмотрим.

2. Постановка задачи

Пусть дано линейное уравнение

$$y''(x)+q(x)y(x)=f(x), \quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{1}$$

Требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее двум (линейным) краевым условиям — в точке a:

$$\alpha_a y(a)+\beta_a y'(a)=\gamma_a \tag{1a}$$

в точке b:

$$\alpha_b y(b)+\beta_b y'(b)=\gamma_b. \tag{1b}$$

---

* Текст этой лекции труднее предыдущих. Пункты, отмеченные *, могут быть при первом чтении пропущены.

Такую задачу мы будем для краткости называть «задача I». Что известно о решении такой задачи? Рассмотрим наряду с задачей I соответствующую однородную задачу II:

$$z''(x)+q(x)z(x)=0 \tag{2}$$

$$\alpha_a z(a)+\beta_a z'(a)=0 \tag{2a}$$

$$\alpha_b z(b)+\beta_b z'(b)=0. \tag{2b}$$

Справедливы следующие два утверждения.

1. Если однородная задача (II) имеет только нулевое решение $z(x)\equiv 0$, то неоднородная задача (I) имеет решение (при любом f и любых γ) и притом только одно.

2. Если однородная задача (II) имеет ненулевое решение $(z(x)\not\equiv 0)$, то соответствующая задача I имеет решение не всегда, а лишь тогда, когда $f(x)$ и γ удовлетворяют некоторым условиям (в конечном числе).

Таким образом, положение дел здесь вполне аналогично тому, которое наблюдается для систем (конечного числа) линейных алгебраических уравнений: если однородная система имеет только тривиальное решение, (т. е. определитель системы не равен нулю), то неоднородная система всегда имеет единственное решение. Если же однородная система имеет нетривиальное решение (т. е. определитель равен нулю — система вырождена), то для существования решения нужно наложить несколько (линейных) условий на правые части неоднородной системы *.

Со времени работ Фредгольма по интегральным уравнениям такого рода ситуация называется в математике альтернативной Фредгольма. Мы будем предполагать, что решение интересующей нас задачи (I) существует и единственно (т. е. имеет место первый случай альтернативы). Наша задача — найти это решение. Заметьте, что в теории дифференциальных уравнений такой вопрос специально не рассматривается — он кажется совершенно тривиальным.

3. Способ решения краевой задачи, вытекающей из теории дифференциальных уравнений

Известно, что общее решение неоднородного уравнения (1) есть сумма какого-либо одного частного решения и общего решения однородного уравнения: $y(x)=y_н(x)+z(x)$. В свою очередь, общее решение (2) есть линейная комбинация 2 частных решений.

Итак:

Общее решение (2): $z(x)=C_1z_1(x)+C_2z_2(x)$ (3)

* Число таких условий m равно степени вырождения системы, т. е. числу уравнений однородной системы, которые являются комбинациями остальных уравнений.

общее решение (1): $y(x) = y_н(x) + C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x)$. (4)

Чтобы выбрать из всех решений (1) то единственное, которое удовлетворяет краевым условиям, нужно найти C_1 и C_2.

Пусть, для простоты, краевые условия имеют вид:

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Тогда для определения C_1 и C_2 мы получим следующую систему 2 линейных уравнений

$$\begin{cases} A = y_н(a) + C_1 z_1(a) + C_2 z_2(a) \\ B = y_н(b) + C_1 z_1(b) + C_2 z_2(b). \end{cases} \tag{5}$$

Итак, достаточно найти одно (любое!) решение уравнения (1) и два (непропорциональных) решения уравнения (2). Это можно сделать, решая задачу Коши — один раз для (1) и два раза для (2). Таким образом, решение краевой задачи (1) сводится в основном к решению *трех* задач Коши.

Нетрудно сообразить, что можно обойтись решением двух задач Коши. Для этого нужно $y_н(x)$ и $z(x)$ выбирать не совсем произвольно, а так, чтобы они уже удовлетворяли одному из граничных условий. Например, при граничном условии $y(a) = A$ можно взять в качестве начальных данных для задач Коши:

$$y_н(a) = A, \quad y_н'(a) = 0;$$
$$z(a) = 0, \quad z'(a) = 1.$$

Всякое решение уравнения (1), у которого $y(a) = A$, есть комбинация этих двух:

$$y(x) = y_н(x) + Cz(x). \tag{6}$$

Для определения C нужно опять использовать правое граничное условие. Если задано $y(b) = B$, то

$$C = \frac{1}{z(b)}(B - y_н(b)). \tag{7}$$

Заметьте, что $z(b) \neq 0$. В самом деле. Если бы $z(b) = 0$, то функция $z(x)$ удовлетворяла бы однородному уравнению (2) и двум однородным граничным условиям $z(a) = z(b) = 0$, т. е. должно быть (как мы предположили с самого начала) $z(x) \equiv 0$. Однако, это невозможно, так как $z'(a) = 1$.

4. К чему может привести «сокращение знаков»

Коль скоро мы умеем численно решать задачу Коши, то способ, который был только что описан, позволяет решить краевую задачу (1): она сводится при этом к двум задачам Коши. Во многих случаях этот способ дает прекрасный результат. Но, пожалуй, чаще этот теоретически безупречный рецепт практически непригоден.

Дело здесь в следующем. Возникшая из конкретной проблемы краевая задача имеет обычно (при подходящем выборе единиц измерения) решение $y(x)\sim 1$. Но частные решения, которые мы выбираем ($y_н(x)$ и $z(x)$) могут оказаться быстро растущими. Если $y_н(x)$ и $z(x)$ велики на части отрезка $[a,b]$, то при нахождении $y(x)$: $y(x)=y_н(x)+Cz(x)$ произойдет вычитание двух больших величин, имеющих разность ~ 1. При этом неизбежно сокращение верных значащих цифр.

Таким образом, естественный способ решения краевой задачи пригоден лишь в тех случаях, когда частные решения $y_н(x)$ и $z(x)$ не являются быстро растущими. Для уравнения (1) это обычно бывает так при $q(x)>0$ (решение однородного уравнения (2) имеют тогда «колебательный характер»). При $q(x)<0$ точность решения, получаемого по формуле (6), будет тем хуже, чем больше $|q(x)|$ (при заданном интервале (a,b)).

Возникает вопрос. Если естественный способ решения краевой задачи отказывает, то, может быть, сама краевая задача «плохая» и ее вообще не следует решать? Мы покажем сейчас на примере постоянного $q(x)$, что в некотором смысле все обстоит наоборот: Чем больше $|q(x)|$ при $q(x)<0$, тем «лучше» краевая задача!

5. * Отступление. Что значит «хорошая» краевая задача?

Вычислительную задачу естественно считать хорошо поставленной, если небольшим изменениям входных данных отвечают небольшие изменения решения.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$y''(x)-k^2y(x)=f(x),\qquad y(0)=y(2\pi)=0. \tag{8}$$

Ввиду *линейности* этой задачи достаточно потребовать, чтобы малым $f(x)$ отвечали небольшие $y(x)$:

$$\max|y(x)|\leqslant M\max|f(x)|. \tag{9}$$

Оценим $y(x)$. Пусть в точке x_0 находится положительный абсолютный максимум $y(x)$. Тогда $y''(x_0)\leqslant 0$. Из уравнения: $k^2y(x_0)=$ $=y''(x_0)-f(x_0)$. Значит, $f(x_0)\leqslant 0$; $k^2y(x_0)=|f(x_0)|+y''(x_0)\leqslant|f(x_0)|$. Итак, $y(x_0)\leqslant\frac{1}{k^2}|f(x_0)|$. Аналогичная оценка справедлива и для отрицательного минимума $y(x)$, и мы можем написать: $\max|y(x)|\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{k^2}\max|f(x)|$, т. е. в формуле (9) $M=\frac{1}{k^2}$. Что касается решения задачи Коши, то для однородного уравнения $z''-k^2z=0$ при начальных условиях $z(0)=0$, $z'(0)=1$ получим $z(x)=\frac{1}{k}\operatorname{sh} kx$. Чем больше k, тем быстрее растет эта функция.

Итак, имеет место следующая парадоксальная на первый взгляд ситуация: чем больше k, тем «лучше» краевая задача (8) и тем «хуже» соответствующая задача Коши. При больших k свести решение краевой задачи к задачам Коши нельзя*, но отказаться от решения краевой задачи мы не имеем права — математически она хорошо поставлена.

6. Разностная задача, отвечающая краевой задаче (1)

Заменим дифференциальное уравнение $y''+q(x)y=f(x)$ (1) разностным уравнением

$$\begin{gathered}\frac{1}{h^2}(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})+q_ky_k=f_k; \qquad h=\frac{b-a}{n};\\ q_k=q(x_k), \quad f_k=f(x_k); \quad x_k=a+kh; \quad k=0,\dots,n.\end{gathered} \tag{10}$$

Добавим к этому граничные условия (в простейшем случае: $y_0=A$, $y_n=B$); мы получаем «трехдиагональную» систему из $n+1$ линейных уравнений для определения неизвестных

$y_0, y_1,\dots,y_n$.

Такая система легко решается методом исключения — совсем легко, если применим простейший метод исключения («прогонка») и немного сложнее, если нужно выбирать главный элемент**. В любом случае проблемы здесь нет.

Трехдиагональная система получится не только для уравнения (1), но и для более общего уравнения

$y''+c(x)y'+q(x)y=f(x)$.

Если точность аппроксимации производных (по трем точкам) покажется недостаточной, можно использовать более точные формулы. Мы получим тогда, скажем 5-диагональную систему линейных уравнений, которую тоже нетрудно решить методом исключения.

Таким образом, с чисто практической точки зрения вопрос о решении краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка можно считать решенным вполне удовлетворительно. Однако, остается некоторое чувство неудовлет-

---

* Конкретно для (8) уже при $k\sim 4$—5.

** Кстати, легко проверить, что как раз для «трудного» случая $q(x)<0$ применима прогонка (см. добавление к 6 лекции).

воренности. Почему все-таки мы не могли наметить план решения, рассматривая дифференциальные, а не разностные уравнения?

7.* Идея переноса граничных условий

Проанализируем еще раз сложившуюся ситуацию. Мы знаем, что искомое решение задачи I находится среди функций вида

$$y(x) = y_{\text{н}}(x) + Cz(x), \tag{6}$$

где $y_{\text{н}}(x)$ и $z(x)$ удовлетворяет граничному условию при $x=a$ (соответственно неоднородному и однородному.)

Обратите внимание: в записи (6) использовано только левое граничное условие (правое понадобится для нахождения C). Таким образом, левое граничное условие из *всех* решений неоднородного уравнения $y''+q(x)y=f(x)$ выбирает некоторое семейство решений $S_{\rightarrow}$ — тех, которые представлены в виде (6). Сделаем теперь следующий шаг. Заметим, что само это семейство решений $S_{\rightarrow}$ не зависит от того, как именно выбраны $y_{\text{н}}(x)$ и $z(x)$: $S_{\rightarrow}$ состоит просто из *всех* решений уравнения (1), удовлетворяющих левому граничному условию. Мы можем задавать $S_{\rightarrow}$ с помощью другой пары функций $y_{\text{н}}(x)$ и $z(x)$, можем использовать различные $y_{\text{н}}(x)$ и $z(x)$ на различных частях отрезка, или задавать $S_{\rightarrow}$ еще каким-нибудь способом. Конкретно мы поступим так: установим связь между значениями $y(x)$ и $y'(x)$ (при одном x) для функций, принадлежащих этому семейству.

Зафиксируем некоторое значение $x=x_0$. Тогда заданием $y(x_0)$ и $y'(x_0)$ однозначно* определится некоторое решение уравнения $y''+q(x)y=f(x)$. Если задавать *произвольно* $y(x_0)$ и $y'(x_0)$, мы получим *все* решения этого уравнения, а не только те, которые удовлетворяют левому граничному условию. Значит, для y из $S_{\rightarrow}$ есть связь между $y(x_0)$ и $y'(x_0)$. Легко показать, что эта связь будет линейной**.

Итак, если $y \in S_{\rightarrow}$, то для каждого x:

$$\alpha_{\rightarrow}(x)y(x) + \beta_{\rightarrow}(x)y'(x) = \gamma_{\rightarrow}(x). \tag{11}$$

Соотношение (11) вполне аналогично левому граничному условию

$$\alpha_a y(a) + \beta_a y'(a) = \gamma_a$$

и совпадает с ним при $x=a$. Таким образом, *следствием* левого граничного условия (1a) является такого же вида связь при каждом x. Образно говоря, если мы сумеем достаточно точно найти $\alpha_{\rightarrow}(x)$, $\beta_{\rightarrow}(x)$, $\gamma_{\rightarrow}(x)$, то «пронесем» граничное условие с левого

---

* В силу теоремы единственности для задачи Коши.

** Продифференцировав (6) и исключив C.

конца через весь отрезок*. На правой границе мы получим тогда два условия: принесенное $\alpha_{\rightarrow}(b)y(b)+\beta_{\rightarrow}(b)y'(b)=\gamma_{\rightarrow}(b)$ и заданное с самого начала $\alpha_b y(b)+\beta_b y'(b)=\gamma_b$. Теперь кажется, что мы избавились от главной трудности в краевой задаче — получили два условия на *одном* конце и можем решать задачу Коши с данными при $x=b$. Однако, эта задача Коши ничуть не лучше тех, от решения которых мы отказались! Чтобы избежать решения задачи Коши, можно действовать симметрично. Исходя из правого граничного условия найти в каждой точке соотношение

$$\alpha_{\leftarrow}(x)y(x)+\beta_{\leftarrow}(x)y'(x)=\gamma_{\leftarrow}(x). \tag{12}$$

Затем из (11) и (12) найти $y(x)$. Чтобы эти соображения превратить в практический рецепт, нужно указать способ для нахождения α, β, γ. В общем виде мы это сейчас делать не будем, а рассмотрим один важный частный случай, когда удобнее действовать несимметрично: найдя $\alpha_{\rightarrow}(x)$, $\beta_{\rightarrow}(x)$, $\gamma_{\rightarrow}(x)$, рассматривать соотношение

$$\alpha_{\rightarrow}(x)y(x)+\beta_{\rightarrow}(x)y'(x)=\gamma_{\rightarrow}(x)$$

как дифференциальное уравнение первого порядка для определения $y(x)$.

8.* «Прогонка» для дифференциального уравнения $y''+q(x)y=f(x)$

Предположим, что в соотношении (11) коэффициент $\beta_{\rightarrow}(x)\neq 0$. Разделив на $\beta_{\rightarrow}(x)$, запишем (11) в виде

$$y'(x)=p(x)y(x)+r(x). \tag{13}$$

Мы должны подобрать $p(x)$ и $r(x)$ так, чтобы всякая функция, удовлетворяющая соотношению (13), принадлежала $S_{\rightarrow}$, т. е. удовлетворяла дифференциальному уравнению $y''+q(x)y=f(x)$ (1) и граничному условию $\alpha_a y(a)+\beta_a y'(a)=\gamma_a$ (1a). Граничному условию мы удовлетворим, если потребуем, чтобы

$$p(a)=-\frac{\alpha_a}{\beta_a}, \qquad r(a)=\frac{\gamma_a}{\beta_a}.$$

Попробуем удовлетворить уравнению. Продифференцируем

* Разумеется, мы должны научиться находить α, β, γ, минуя вычисление $y_{н}(x)$ и $z(x)$: вычисление α, β, γ через $y_{н}(x)$ и $z(x)$ из формулы (6) снова привело бы к «сокращению знаков».

соотношение (13): $y'' = p'y + py' + r'$. Использовав уравнение (1), получим

$$-qy + f = p'y + py' + r'$$

или

$$y' = -\frac{p' + q}{p} y + \frac{f - r'}{p}. \qquad (14)$$

Соотношение (14), выполняющееся для *всех* функций $S_{\rightarrow}$, должно *совпадать* с соотношением (13). Поэтому получаем

$$p' = -p^2 - q \qquad (15а)$$

$$r' = -rp + f. \qquad (15б)$$

Формулы (15) позволяют нам предложить следующий рецепт для решения краевой задачи I.

1 этап. Решаем дифференциальные уравнения для $p(x)$ и $r(x)$:

$$p' = -p^2 - q; \quad r' = -rp + f$$

с начальными условиями

$$p(a) = -\frac{\alpha_a}{\beta_a}; \quad r(a) = -\frac{\gamma_a}{\beta_a}$$

($q(x)$ и $f(x)$ — известные функции).

2 этап. Находим $y(x)$ из собтношения (13) $y'(x) = p(x)y(x) + r(x)$, рассматривая его как дифференциальное уравнение первого порядка. При решении этого уравнения используем правое граничное условие $\alpha_b y(b) + \beta_b y'(b) = \gamma_b$ и коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$, найденные на 1 этапе.

Уравнения (15) обладают многими интересными свойствами. Я отмечу здесь только одно, самое главное. Уравнение для $p(x)$

$$\frac{dp}{dx} = -p^2(x) - q(x) \text{ — нелинейное!}$$

Таким образом, для решения линейной краевой задачи предлагается решать нелинейное уравнение. Это так называемое уравнение Риккати. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что его решение может быть сведено к решению линейного уравнения 2 порядка. Очень поучительно, что здесь теория «работает в обратную сторону»: линейное уравнение сводится к нелинейному.

9.* Аналогия с дискретной задачей

Дискретная (разностная) задача (10), если можно использовать простейший метод исключения (прогонку), решается в 2 этапа *.

1) Находим p_k и r_k по рекуррентным формулам

$$m_k=\frac{c_k}{b_k-a_kp_{k-1}}; \qquad r_k=\frac{f_k-a_kr_{k-1}}{b_k-a_kp_{k-1}}. \tag{16}$$

Здесь a_k, b_k, c_k — коэффициенты трехдиагональной системы; k меняется «слева направо»: от 1 до $n-1$.

2) Находим y_k по формуле

$$y_k=-p_ky_{k+1}+r_k, \tag{17}$$

двигаясь «справа налево»: $k=n-1$, $n-2,\ldots,0$. На первом этапе используется только левое граничное условие. В начале второго — правое. Аналогия, как вы видите, полная. Более того, если отнормировать подходящим образом p_k и r_k, то в пределе, при $h\to 0$ «дискретные» формулы (16) и (17) перейдут в «непрерывные» — (15) и (13)!

Таким образом, обнаруживается замечательная связь. С одной стороны была «чисто алгебраическая» задача о решении системы линейных алгебраических уравнений, и мы применили «чисто алгебраический» метод исключения (в его простейшей форме). С другой стороны была дифференциальная задача, и довольно сложные рассуждения о переносе граничных условий привели нас к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка (15) (и еще одному уравнению (13) отдельно). По существу же, это близкие вещи, и (говоря нестрого) при $h\to 0$ дискретная «прогонка» переходит в непрерывную. Пожалуй, стоит подчеркнуть, что сама идея переноса граничных условий (выделение семейства решений, удовлетворяющих одному граничному условию) носит общий характер. Эту идею (даже для разностных уравнений) совсем не обязательно связывать с методом исключения.

Последнее замечание. Рецепт п. 8 предлагает для решения краевой задачи решать 2 задачи Коши. Правда, не для исходного уравнения 2 порядка, но чем это лучше?

Пока не доказано, что эти задачи Коши являются вычислительно устойчивыми, рецепт п. 8, собственно, ничего не стоит. Оказывается, во многих случаях (их можно точно указать) задачи Коши (15) и (13) являются «хорошими». Например, это будет так при $q(x)<0$ (как раз «трудный случай»!) и граничных условиях $y'(a)=y'(b)=0$. Но сейчас мы не будем проводить соответствующие доказательства.

---

* См. лекцию 4.