

ЛЕКЦИЯ 6


УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. НЕЯВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ. ВОПРОС О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

1. Простейшая неявная схема

В предыдущей лекции мы выяснили, что при приближенном решении уравнений с частными производными на первый план выдвигается вопрос об устойчивости разностных аппроксимаций.

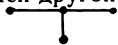
Ограничения из-за устойчивости часто бывают весьма жесткими. Классический пример — уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Если τ — шаг по t и h — шаг по x , то условие устойчивости простейшей разностной схемы  таково:

$$\frac{D\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \tau \leq \frac{h^2}{2D}. \quad (2)$$

Это условие во многих случаях слишком ограничительно (требует слишком малого τ). Поэтому почти сразу, как только разностные аппроксимации стали всерьез применяться к уравнениям с частными производными, был предложен другой способ.

Его можно схематически изобразить так  или формульно:

$$\frac{1}{\tau} (u_k^{n+1} - u_k^n) = \frac{D}{h^2} (u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}). \quad (3)$$

Здесь $u_k^n = \tilde{u}(kh, n\tau)$, $\tilde{u}(x, t)$, как и раньше, приближенное решение (определенное только для дискретного набора точек).

Вы видите, что здесь нет «явной» формулы для нахождения значений на следующем слое по известным значениям на предыдущем слое — для значений u_k^{n+1} мы записали лишь систему уравнений, которую еще нужно решить. В этом и состоит радикальное отличие этой *неявной* аппроксимации от простейших аппроксимаций, рассмотренных в предыдущей лекции.

Немедленно возникает два вопроса.

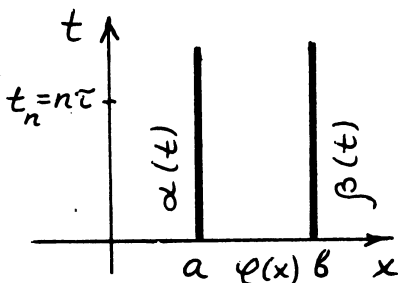
- 1) Как решить систему уравнений на очередном, n -ом слое?
- 2) Будет ли схема (3) более устойчива, чем простейшая *явная* схема — только в этом случае ее имеет смысл использовать. Забегая вперед, скажу ответ на второй вопрос: схема (3) устойчива при *любых* τ и h . Это очень важно: мы можем выбирать такие τ и h , какие требует сама задача — большие при плавном изменении u и меньшие при резком.

2. Решение уравнений на слое. Прогонка

Итак, пусть задано уравнение (1) и краевая задача для него: $u(x,0) = \varphi(x)$; $u(a,t) = \alpha(t)$; $u(b,t) = \beta(t)$. Для нахождения u_k^n по известным u_k^{n-1} мы получим из (3) систему линейных уравнений:

$$\gamma u_{k+1}^n - (1+2\gamma) u_k^n + \gamma u_{k-1}^n = -u_k^{n-1}, \quad \gamma = \frac{D\tau}{h^2}. \quad (4)$$

Если добавить к (4) граничные условия $u_0^n = \alpha(n\tau)$, $u_K^n = \beta(n\tau)$, то будет столько же уравнений, сколько неизвестных.



Заметим теперь, что система (4) имеет знакомый нам «треугольный» вид. Мы рассматривали такую систему во 2 лекции и убедились, что простейший метод исключения (без выбора главного элемента) допускает удобную формульную запись. Напишем эти формулы еще раз. Пусть система линейных уравнений имеет вид:

$$a_k y_{k-1} + b_k y_k + c_k y_{k+1} = f_k; \quad k = 0, 1, \dots, K; \quad (a_0 = c_K = 0) \quad (5)$$

Тогда:

1 этап

Находятся рекуррентно в порядке $1, \dots, K-1, K$ p_k и r_k по формулам

$$p_k = \frac{c_k}{b_k - a_k p_{k-1}}; \quad r_k = \frac{f_k - a_k r_{k-1}}{b_k - a_k p_{k-1}}. \quad (6)$$

При этом $p_0 = c_0/b_0$; $r_0 = f_0/b_0$.

2 этап

Находятся рекуррентно в порядке $K, K-1, \dots, 0$ неизвестные по формулам

$$y_k = r_k - p_k y_{k+1}, \quad y_K = r_K. \quad (7)$$

Может быть, не вредно еще раз подчеркнуть, что этот рецепт (называемый «прогонкой») не есть какой-то специальный метод решения линейных систем. Напротив, это есть простейший способ последовательного исключения неизвестных, записанный (для этой системы) рекуррентными формулами.

Итак, систему «на слое» (4) мы можем легко решить прогонкой (формулы (6) и (7)). Возникает лишь один вопрос: применим ли здесь этот способ (т. е. дает ли он решение с достаточной точностью)?

Ответить на него можно двумя способами:

1) Непосредственно показать, что при решении системы (4) по формулам (6) и (7) не придется делить на 0 и ошибки от округлений не будут сильно возрастать.

2) Убедиться, что для нашей системы *простейший* метод исключения совпадает с *полным* (включающим в себя выбор главного элемента). Иначе говоря, показать, что выбор главного элемента здесь не нужен, и после этого сослаться на недоказанную (и не сформулированную) теорему: всякая «порядочная» система может быть решена методом исключения с выбором главного элемента.

Логически первый путь лучше, так как не придется использовать недоказанных теорем. Второй способ, пожалуй, поучительнее (это доказательство намечено в дополнении).

3. Об устойчивости неявной схемы (4)

Начнем с исследования методом Фурье. Для этого мы поступим так. Отбросим границы и рассмотрим задачу по всей прямой $-\infty < x < \infty$. Теперь зададим начальные данные $u(x, 0) = e^{isx}$ и ищем решение в виде:

$$\bar{u}(x, t) = e^{i s x + \lambda t} \quad \text{или} \quad u_k^{(n)} = e^{i \sigma k} \mu^n (\sigma = h s, \mu = e^{\lambda \tau}). \quad (8)$$

Нас интересует, каким будет μ . Подставив в (4) и сократив на $\mu^{n-1} e^{i \sigma k}$, получим $\mu [\gamma e^{i \sigma} - (1 + 2\gamma) + \gamma e^{-i \sigma}] = -1$, или

$$\mu = \frac{1}{1 + 4\gamma \sin^2 \sigma/2}. \quad (9)$$

При всех (вещественных) σ и всех $\gamma > 0$ $\mu \leq 1$, условие устойчивости снова выполнено в усиленном виде:

$$|\bar{u}(x, t)| \leq |\bar{u}(x, 0)|.$$

Итак, метод Фурье не обнаруживает неустойчивости ни при каких τ и h . Конечно, мы не доказали устойчивости полностью, при любых начальных данных, но каждая отдельная «гармоника» не возрастает. Аккуратное доказательство абсолютной устойчивости схемы (4) (и притом сразу для краевой задачи и переменного D) можно снова получить из принципа максимума*. А пока мы вернемся к методу Фурье. При внимательном рассмотрении здесь вовсе не все так ясно.

Заметим, во-первых, что отказавшись от краевых условий, мы должны на очередном слое решать *бесконечную* систему линейных уравнений. Правда, эта система устроена просто — в каждое уравнение входит лишь 3 неизвестных, но все же это бесконечная система. Во-вторых, мы нашли *некоторое* решение задачи Коши для наших специальных начальных данных. Но нет ли другого? Собственно, этим вопросом следовало бы задаться заранее, до исследования устойчивости; попробуем разобратся.

Система уравнений на очередном слое (4) есть (при известном $u_k^{(n-1)}$) линейное одномерное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Обозначив временно $u_k^n = u_k$, $-u_k^{(n-1)} = f_k$, мы можем записать его общее решение в виде $u_k = u_k^{(n)} + v_k$, где $u_k^{(n)}$ *какое-нибудь* решение уравнения

$$\gamma u_{k+1} - (1 + 2\gamma) u_k + \gamma u_{k-1} = f_k \quad (10)$$

и v_k — общее решение соответствующего *однородного* уравнения

$$\gamma v_{k+1} - (1 + 2\gamma) v_k + \gamma v_{k-1} = 0. \quad (11)$$

Значит, решение задачи Коши для разностной системы (4) неединственно: на каждом слое ($n = 1, 2, \dots$) можно добавить лю-

* См. дополнение к этой лекции.

бое решение уравнения (11). Стало быть, мы поступили неаккуратно — просто «отбросить» границы нельзя! Однако, можно границы «отодвинуть на ∞ » и потребовать *ограниченности* $\bar{u}(x, t)$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Покажем, что *ограниченное* решение (10) может быть только одно. Действительно, если бы было два таких решения, то их разность удовлетворяла бы уравнению (11). Общее решение (11) есть $v_k = C_1 \mu_1^k + C_2 \mu_2^k$, где μ_1 и μ_2 — корни характеристического уравнения

$$\gamma \mu^2 - (1 + 2\gamma) \mu + \gamma = 0.$$

Значит, $|v_k| \leq \text{const}$ при всех k только при $C_1 = C_2 = 0$.

Итак, если мы хотим рассматривать неявную схему (3) (или (4)) на всей прямой, то нужно добавить требование: при каждом n для всех k $|u_k^n| \leq C$. При таком понимании «задачи Коши» ее решение единственно*, и удобное для метода Фурье рассмотрение задачи на всей прямой приобретает точный смысл.

4. Еще один пример

Рассмотрим уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}$ и две похожих разностных аппроксимации — явную и неявную:

$$\frac{1}{\tau} (u_k^{(n+1)} - u_k^{(n)}) = \frac{c}{2h} (u_{k+1}^{(n)} - u_{k-1}^{(n)}) \quad \text{схема } \begin{array}{c} | \\ \hline \end{array} \quad (12)$$

$$\frac{1}{\tau} (u_k^{(n+1)} - u_k^{(n)}) = \frac{c}{2h} (u_{k+1}^{(n+1)} - u_{k-1}^{(n+1)}) \quad \text{схема } \begin{array}{c} \hline | \\ \end{array} \quad (13)$$

Рассмотрим снова (как в п. 3) задачу Коши на всей прямой в классе ограниченных функций и исследуем устойчивость методом Фурье. Положив $u_k^{(n)} = \mu^n e^{i\sigma k}$, мы получим

$$\mu = 1 + \frac{1}{2} \gamma (e^{i\sigma} - e^{-i\sigma}) = 1 + i\gamma \sin \sigma \quad \text{для схемы } \begin{array}{c} | \\ \hline \end{array}$$

$$\mu = (1 - i\gamma \sin \sigma)^{-1} \quad \text{для схемы } \begin{array}{c} \hline | \\ \end{array}; \quad \gamma = \frac{c\tau}{h}.$$

Вы видите, что неявная схема (13) устойчива при любых τ и h , точнее — не проявляет неустойчивости при проверке методом Фурье. Для явной схемы (12) $|\mu_{\max}|^2 = 1 + \gamma^2 > 1$ при любом γ . Здесь метод Фурье, как будто бы, выявляет неустойчивость. Однако, давайте посмотрим более аккуратно.

* Мы, однако, не доказывали, что при любых ограниченных начальных данных решение такой задачи Коши существует.

5. О необходимом условии устойчивости

У начинающих вычислителей часто складывается мнение, что при исследовании устойчивости разностной задачи Коши методом Фурье необходимо требовать, чтобы $|\mu| \leq 1$. Но, вообще, это не так: требование $|\mu| \leq 1$ не является необходимым для устойчивости.

Рассмотрим для примера уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au$; $a > 0$.

Перейдем к разностному уравнению:

$$\frac{1}{\tau} (u_k^{(n+1)} - u_k^{(n)}) = \frac{D}{h^2} (u_{k+1}^{(n)} - 2u_k^{(n)} + u_{k-1}^{(n)}) + au_k^{(n)}.$$

Подставив $u_k^{(n)} = \mu^n e^{ik\sigma}$, получим

$$\mu(\sigma) = -4\gamma \sin^2 \frac{\sigma}{2} + a\tau, \quad \gamma = \frac{D\tau}{h^2}.$$

Ни при каком τ мы не можем добиться того, чтобы $|\mu(\sigma)| \leq 1$ при всех σ . Таким образом, обязательно будут растущие решения задачи Коши.

В чем дело? Может быть нужно забраковать эту схему? Нет, схема не виновата: в исходном дифференциальном уравнении есть экспоненциально растущее решение $u(x, t) = e^{at}$. Ясно, что в приближающем его разностном уравнении тоже должны быть растущие решения.

Чтобы получить правильное ограничение на μ , вернемся к определению устойчивости разностной задачи Коши. При фиксированных начальных данных мы требуем: $|\bar{u}(x, t)| \leq C$ при $0 \leq t \leq T$ (C не зависит от τ и h). При $u(x_k, t_n) = u_k^{(n)} = \mu^n e^{ik\sigma}$ получим $|\bar{u}(x, t)| = |\mu|^n$. Обратите внимание: n пробегает не все возможные значения, а подчинено условию $0 \leq n \leq T/\tau$.

Итак, должно быть при $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ $|\mu(h, \tau)|^{T/\tau} \leq C$. Это требование эквивалентно неравенству:

$$|\mu(h, \tau)| \leq 1 + a\tau^* \quad (\text{для допустимых } \tau \text{ и } h) \quad (14)$$

Вот это условие (а не условие $|\mu| \leq 1$) действительно необходимо для устойчивости.

Теперь вернемся к схеме (12). Используя условие (14), мы видим, что эта схема формально устойчива**, если в качестве допустимых взять τ и h , подчиненные неравенству $\gamma^2 \leq a\tau$, или: $\tau/h^2 \leq b$ (с любым b). Так что, строго говоря, высказывание

* При этом $C = \exp(aT)$.

** Точнее, выдерживает проверку на устойчивость методом Фурье.

«схема (12) неустойчива» — неправильно. Тем не менее, обычно так говорят. При этом имеют в виду следующее:

1) Условие $\tau/h^2 \leq b$ практически неудобно: при малых h диктует слишком малые τ .

2) Произвол в выборе b свидетельствует о формальном характере этого условия — оно никак не отражает свойств дифференциального уравнения $u_t = cu_x$. Для контраста рассмотрим знакомое нам условие $c\tau/h \leq 1$. Это условие означает, что $c\tau \leq h$, т. е. за время τ возмущения, движущиеся в силу дифференциального уравнения, должны проходить путь не больше h — ясное и наглядное требование.

3) Разностное уравнение (12) имеет растущие по времени решения $\tilde{u}(x, t)$ (рост тем быстрее, чем больше b). Исходное дифференциальное уравнение $u_t = cu_x$ растущих решений не имеет.

6. Типичная картина при возникновении неустойчивости

Предположим, что по ошибке (или в целях эксперимента) при вычислениях на машине использована неустойчивая схема. Что получается? Если неустойчивость сильная, то довольно скоро получится «авост»* — машина остановится (или займется другими задачами). Если же неустойчивость слабая, то она проявится в возникновении характерных осцилляций. Картинка в некоторый момент времени будет примерно такая



Почему возникает такая «пила»? Я сейчас это объясню, а потом извлеку из этой неприятной для вычислителя картины некоторые позитивные выводы. Вернемся к классическому примеру $u_t = Du_{xx}$. Возьмем снова начальные данные $u(x, 0) = \exp(isx)$ и простейшую разностную схему $\frac{u_k^{(n)} - u_k^{(n-1)})}{\tau} = \frac{u_{k+1}^{(n-1)} - 2u_k^{(n-1)} + u_{k-1}^{(n-1)})}{h^2}$. Тогда $u_k^{(n)} = u(kh, n\tau) = (\mu(s))^n e^{ik\sigma}$, где $\sigma = hs$ и $\mu(s) = 1 - 4\gamma \sin^2 \sigma/2$. Если зафиксировать s и γ , а τ и h устремить к 0, то с некоторого момента будет $|\mu(s)| \leq 1$.

Откуда же берется неустойчивость при $\gamma > 1/2$? При $\gamma > 1/2$ наиболее неустойчивой будет гармоника, для которой $\sin \sigma/2 = 1$, т. е. $\sigma = \pi$, $s = \pi/h$. Это отвечает начальным данным $\tilde{u}(x, 0) = e^{i\pi x/h}$ или $u_k^{(0)} = (-1)^k$. Таков формальный ответ.

По существу же — это самая «высокая гармоника» на сетке. Как понимать такое высказывание? Конечно, можно взять e^{isx} при $s > \pi/h$, но на сетке $x_k = kh$

$$e^{isx} = e^{is_1 x},$$

где уже $|s_1| \leq \pi/h$ ($s_1 = s - 2\pi m/h$ при целом m).

* То есть вычисления прекратятся из-за появления слишком больших чисел.

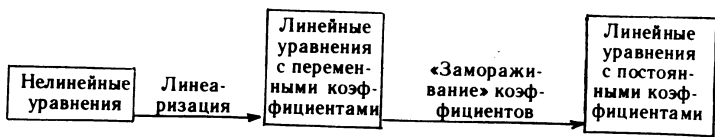
Иначе говоря, при наличии минимального расстояния h по x есть максимальная частота $s_{max} = \pi/h$. При уменьшении h она увеличивается. Такая двойственность между малыми расстояниями и высокими частотами играет очень большую роль в квантовой механике и во многих разделах математического анализа. Итак, в нашем примере самыми неустойчивыми являются гармоника с самой высокой частотой. Произвольные начальные данные содержат высокие гармоники (кроме того, они появляются за счет округления) *. Если есть неустойчивость, эти гармоники вырастают быстрее других и появляются частые колебания по x . Это — сигнал для вычислителя: «ищи неустойчивость».

Пример с уравнением теплопроводности является типичным. Каждая фиксированная гармоника e^{isx} при τ и h , достаточно малых, изменяется в разностном уравнении почти так же, как в дифференциальном **. Но с уменьшением h «вступают в игру» все более высокочастотные колебания по x . Они-то и могут сильно вырасти на заданном промежутке времени.

7. Линеаризация и «замораживание» коэффициентов

При исследовании устойчивости задачи Коши для разностных уравнений наиболее «ходовой» рабочий инструмент — метод Фурье. Но он легко применяется лишь к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. Практически мы имеем обычно дело с переменными коэффициентами, а еще чаще с нелинейными уравнениями.

Чтобы исследовать устойчивость в такой задаче, совершают следующие две процедуры. Во-первых, линеаризуют уравнение (и граничные условия) вблизи начальных данных или данных на очередном слое. Во-вторых, «замораживают» коэффициенты, т. е. берут вместо переменных коэффициентов — постоянные (равные значениям их в некоторой точке).



* Немного более аккуратно. Нужно записать

$$u_k^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(\sigma) e^{ik\sigma} d\sigma \quad (\text{при этом } a(\sigma) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m^{(0)} e^{-im\sigma}).$$

$$\text{Тогда } u_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\mu(\sigma))^n a(\sigma) e^{ik\sigma} d\sigma.$$

** Мы уже обсуждали это в 5 лекции при «доказательстве» теоремы.

Наконец, исследуют получившуюся простую задачу. Если она оказывается устойчивой, то полагают устойчивой и исходную задачу.

Первый шаг более или менее понятен. Мы двигаемся малыми (для данной задачи) шагами по времени. За малое время система ведет себя приблизительно как линейная. Но почему можно заменить переменные коэффициенты — постоянными? Коэффициенты вовсе не являются слабо меняющимися по x ! Картинки возникновения неустойчивости проливают некоторый свет на этот вопрос. Дело в том, что неустойчивость возникает «на высоких частотах», за счет осцилляций u , сравнимых с масштабом сетки h . Если h достаточно мало, то по сравнению с этими быстрыми осцилляциями коэффициенты меняются очень медленно и плавно. Вот почему при исследовании устойчивости столь много ценных сведений может дать такой грубый прием, как замена переменных коэффициентов — постоянными. Разумеется, все эти описательные рассуждения не есть доказательство, но во многих случаях, аккуратно оговорив условия, можно дать «принципу замораживания коэффициентов» строгое доказательство.

8. Понятие о точности разностных аппроксимаций дифференциальных уравнений

В отличие от проблемы устойчивости этот вопрос есть смысл обсудить в самом общем виде. Ненадолго мы забудем даже, что нас интересуют дифференциальные уравнения.

Итак, пусть есть уравнение

$$I \quad F[u] = 0.$$

Вместо этого уравнения мы решаем некоторое приближенное уравнение II

$$\tilde{F}[\tilde{u}] = 0.$$

Как узнать, насколько мы ошибаемся? Проще всего было бы из u вычесть \tilde{u} и оценить величину разности. Но решение I нам неизвестно. Можно попробовать поступить так. Подставить \tilde{u} в точное уравнение I. Получится $F[\tilde{u}] = \delta$. Если δ — мало, то, наверное, приближение хорошее. Для интересующего нас случая, когда I — дифференциальное уравнение, а II — разностное, возникает следующее затруднение. Функция $\tilde{u}(x, t)$ задана только для дискретного набора точек. Раньше, чем подставить \tilde{u} в дифференциальное уравнение, нужно превратить ее в достаточно хорошую функцию непрерывного аргумента. Это можно сделать, но требует некоторых хлопот.

Поэтому обычно поступают наоборот. Берут (конечно, мысленно) точное решение $u(x, t)$ и подставляют в приближенное уравнение II.

Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение для опреде-

ления функции $u(x, t): F[u] = 0$ и разностное уравнение для определения функции дискретного аргумента $\tilde{u}(x, t)$

$$(x = kh, t = n\tau): \tilde{F}[\tilde{u}] = 0.$$

Пусть τ и h стремятся к 0, подчиняясь, возможно, некоторым ограничениям. Если при этом для любой достаточно гладкой функции $\varphi(x, t)$ $\tilde{F}_{\tau, h}[\varphi] \rightarrow F[\varphi]^*$, то говорят, что $\tilde{F}_{\tau, h}$ аппроксимирует F .

Для точного решения $u(x, t)$ уравнения $F[u] = 0$ мы получим: $\tilde{F}_{\tau, h}[u] = r_{\tau, h} \rightarrow 0$.

По скорости стремления r к 0 судят о точности аппроксимации. В частности, если $r_{\tau, h} = C_1\tau^p + C_2h^q + o(\tau^p + h^q)$, то говорят, что рассматриваемая разностная аппроксимация имеет порядок p по t и порядок q по x .

Важное замечание.

Условие $\tilde{F}_{\tau, h}[\varphi] \rightarrow F[\varphi]$ требует определенной записи разностного уравнения. Скажем, нельзя записать \tilde{F} для

$$F[\varphi] = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

в виде

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\tau, h}[\varphi] &= \varphi(x, t + \tau) - \varphi(x, t) - \\ &- \frac{D\tau}{h^2} (\varphi(x + h, t) - 2\varphi(x, t) + \varphi(x - h, t)). \end{aligned}$$

(Тогда при τ и $h \rightarrow 0$ $\tilde{F}_{\tau, h}[\varphi] \rightarrow 0$). Правильная запись такова:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\tau, h}[\varphi] &= \frac{1}{\tau} (\varphi(x, t + \tau) - \varphi(x, t)) - \\ &- \frac{D}{h^2} (\varphi(x + h, t) - 2\varphi(x, t) + \varphi(x - h, t)). \end{aligned}$$

Рассмотрим пример.

$$\text{Пусть } L[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\tilde{L}_{\tau, h}[\tilde{u}] = \frac{1}{\tau} (\tilde{u}(x, t + \tau) - \tilde{u}(x, t)) - \frac{c}{h} (\tilde{u}(x + h, t) - \tilde{u}(x, t)).$$

Для произвольной (дифференцируемой) функции $\varphi(x, t)$ при τ и $h \rightarrow 0$

$$\tilde{L}_{\tau, h}[\varphi] \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} - c \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Таким образом, \tilde{L} аппроксимирует L . Пусть теперь $\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Вычисляя $r_{\tau, h} = \tilde{L}_{\tau, h}[u]$, получим:

* Это не совсем аккуратная запись, но ее нетрудно уточнить.

$$r_{\tau,h} = u_t(x,t) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(x,t) - cu_x(x,t) - \frac{ch}{2} u_{xx}(x,t) + O(\tau^2 + h^2) = \frac{\tau}{2} u_{tt}(x,t) - \frac{ch}{2} u_{xx}(x,t) + O(\tau^2 + h^2).$$

Таким образом, схема имеет первый порядок точности по x и по t *. Заметьте, что точность аппроксимации одинакова как для случая $c > 0$, когда эта разностная схема пригодна, так и для случая $c < 0$, когда она совершенно не годится!

Аналогично можно разобрать и другие примеры. Я ограничусь еще двумя, которые приведу без вычислений.

1. Для уравнения $u_t = Du_{xx}$ простейшая явная схема и простейшая неявная схема обе имеют первый порядок точности по t и второй по x , т. е. при малых τ и h

$$r_{\tau,h} \approx A(x,t) \cdot \tau + B(x,t) \cdot h^2. \quad (15)$$

Заметьте, что в случае явной схемы мы вынуждены брать $\tau \sim h^2$, так что оба слагаемых в (15) имеют один порядок малости. В случае неявной схемы (когда вполне допустимо $\tau \sim h$) желательнее уменьшить первое слагаемое. Это можно сделать, если использовать симметрично 6 точек

$$\begin{array}{cccc} n+1 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & k-1 & k & k+1 & \end{array}$$

2. Для волнового уравнения $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ простейшая разностная схема такова

$$\frac{1}{\tau^2} (u_k^{n+1} - 2u_k^n + u_k^{n-1}) = \frac{c^2}{h^2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n).$$

Она имеет второй порядок точности по x и по t . Условие устойчивости такой схемы дает знакомое нам неравенство, имеющее простой наглядный смысл: $|c| \tau \leq h$.

9. Определение порядка точности при приближенном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений

Напомним, что для обыкновенных дифференциальных уравнений точность приближенного метода мы оценивали по ошибке, совершаемой на одном шаге. Такое определение приспособлено к задаче Коши и даже в этом случае не годится для много-

* Если τ и $h \rightarrow 0$ так, что $\frac{c\tau}{h} = 1$, то точность схемы повышается. Проверьте это!

точечных методов (типа метода Адамса). Теперь мы можем легко дать общее определение.

О п р е д е л е н и е

Пусть обыкновенное дифференциальное уравнение $D[u]=0$ заменено при каждом h системой уравнений $\tilde{D}_h[\tilde{u}]=0$ для определения приближенных значений $u(kh)=u_k$. Это приближение имеет (локальный) порядок точности m , если:

- а) при $h \rightarrow 0$ $\tilde{D}_h[\varphi] \rightarrow D[\varphi]$ для произвольной функции φ^* ;
- б) при подстановке точного решения $u(x)$ интересующей нас задачи в приближенное уравнение получается

$$\tilde{D}_h[u] = A(x)h^m + o(h^m).$$

П р и м е р: Метод Адамса

Для уравнения $\frac{du}{dx} = f(u)$ формула метода Адамса «второго порядка» имеет вид:

$$u_{k+1} = u_k + h \left(\frac{3}{2} f(u_k) - \frac{1}{2} f(u_{k-1}) \right). \quad (16)$$

Запишем:

$$D[u] = \frac{du}{dx} - f(u) \quad (17)$$

$$\tilde{D}_h[\tilde{u}] = \frac{1}{h} [\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)] - \frac{3}{2} f(\tilde{u}(x)) + \frac{1}{2} f(\tilde{u}(x-h)).$$

При $h \rightarrow 0$ для любой функции $\varphi(x)$ $\tilde{D}_h[\varphi] \rightarrow \frac{d\varphi}{dx} - f(\varphi)$, т. е. запись (17) правильная. Пусть теперь

$$D[u] = 0, \quad \text{т. е.} \quad u'(x) = f(u(x)).$$

Тогда

$$D_h[u] = \frac{1}{h} (u(x+h) - u(x)) - \frac{3}{2} u'(x) + \frac{1}{2} u'(x-h) = O(h^2).$$

Итак, формула (15) дает метод второго порядка точности в смысле нашего общего определения.

10. Заключительные замечания

Заканчивая предварительное рассмотрение уравнений с частными производными, заметим, что мы оставили без ответа (и даже без обсуждения) основной вопрос: насколько отличается найденное нами приближенное решение $u(x, t)$ от точного? В описательных терминах ответ дать нетрудно. Именно, если раз-

* Имеющей достаточное число производных.

ностная схема *устойчива* и *аппроксимирует* дифференциальное уравнение, то при уменьшении τ и h $u(x, t)$ приближается к $u(x, t)$.

Скорость приближения определяется точностью аппроксимации.

Для аккуратной формулировки нужно несколько расширить требования устойчивости: необходима устойчивость не только относительно изменения начальных (и краевых) условий, но и относительно изменения правой части (линейного) уравнения. После такого расширения соответствующая теорема (для линейных уравнений!) легко доказывается.

Дополнения и примечания к 6 лекции

1) (к п. 2). Рассмотрим систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Покажем, что метод исключения с выбором главного элемента (начиная со 2 шага) будет совпадать с простейшим методом исключения, если:

$$(1) \quad |b_k| > |a_k| + |c_k|; \quad (2) \quad |b_k| > |a_k| + |a_{k+1}|.$$

В частности при постоянных, не зависящих от k коэффициентах достаточно:

$$(1') \quad |b| > |a| + |c|; \quad (2') \quad |b| > 2|a|.$$

Доказательство проведем индукцией по числу шагов исключения. После первого шага мы получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & p_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \text{где} \quad |p_1| = \frac{|c_1|}{|b_1|} < 1.$$

Пусть теперь $|p_{k-1}| < 1$ и на k -м шаге *не* понадобилось переставлять строки. Докажем, что на $(k+1)$ -ом шаге также не понадобится переставлять строки и, что $|p_k| < 1$.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & p_{k-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & p_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_k & b_k & c_k & 0 & \longrightarrow & 0 & 0 & b_k - a_k p_{k-1} & c_k & 0 \\ 0 & 0 & a_{k+1} & b_{k+1} & c_{k+1} & & 0 & 0 & a_{k+1} & b_{k+1} & c_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

В силу предположения $|p_{k-1}| < 1$ имеем $|b_k - a_k p_{k-1}| > |b_k| - |a_k| > |a_{k+1}|$ — перестановка строк не нужна. Теперь

$$|p_k| = \left| \frac{c_k}{b_k - a_k p_{k-1}} \right| < \frac{|c_k|}{|b_k| - |a_k|} < 1.$$

Индукция проведена. Заметим, что для схемы (4) условия (1'), (2') выполнены.

2) (к п. 3). Покажем, что разностная система (3), дополненная краевыми условиями:

заданы $u_0^n = \alpha_n$ и $u_K^n = \beta_n$, удовлетворяет принципу максимума, т.е.

$$|u_k^n| \leq \max(|u_j^0|, |\alpha_n|, |\beta_n|); \quad 0 \leq k \leq K, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (18)$$

Предположим, что $\max_k u_k^n$ достигается во внутренней точке k_0 ($1 \leq k_0 \leq K-1$). Тогда $u_{k_0-1}^n - 2u_{k_0}^n + u_{k_0+1}^n \leq 0$ и из (3) получим:

$$u_{k_0}^n - u_{k_0}^{n-1} \leq 0, \quad \text{т.е.} \quad \max_k u_k^n \leq \max_k u_k^{n-1}.$$

Аналогично для внутреннего минимума $\min_k u_k^n \geq \min_k u_k^{n-1}$.

Если $\max_k |u_k^n|$ достигается на границе, то он равен $|\alpha_n|$ или $|\beta_n|$.

Окончательно $\max_k |u_k^n|$ не превосходит наибольшего из чисел:

$\max_k |u_k^{n-1}|, |\alpha_n|, |\beta_n|$. Отсюда, двигаясь по n от 0 до N , получаем (18).