ЛЕКЦИЯ 4

ПРИБЛИЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Обе основные операции анализа — дифференцирование и интегрирование — содержат в себе предельный переход и, тем самым, требуют знания функции на целом отрезке. Нам нужны приближенные дискретные аналоги этих операций, такие, которые бы использовали лишь конечное число значений функции.

Традиционный способ получать такие формулы состоит в следующем. Берут функцию и строят многочлен, который в нескольких точках совпадает с этой функцией; такой многочлен называется интерполяционным, а сама процедура называется интерполированием *. Затем вместо того, чтобы интегрировать или дифференцировать функцию, интегрируют или дифференцируют этот многочлен. Поскольку при построении интерполяционного многочлена используются только несколько значений функции, то окончательные формулы содержат только эти значения.

Таков традиционный путь. Если следовать этому пути, то нужно сначала развить теорию интерполирования многочленами. Это требует довольно много времени. Поэтому для начала мы поступим не так, а получим нужные нам простые формулы элементарными средствами.

Идея интерполирования тоже будет использована, но не в общем виде, а для нужных нам конкретных примеров. Вот таков план.

1. Приближенное нахождение производной

Для того, чтобы получить простейшую приближенную формулу для производной, нужно знать только ее определение:

* Более точно: интерполированием посредством многочленов заданной степени.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x)). \tag{1}$$

При малом h можно положить:

$$f'(x)\approx\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x)). \tag{2}$$

Это и есть простейшая приближенная формула.

В определении (1) h может принимать значения обоих знаков.

В дискретной записи принято обозначать через h положительное число, так что можно написать еще одну формулу:

$$f'(x)\approx\frac{1}{h}(f(x)-f(x-h)),\qquad h>0. \tag{2'}$$

Какую ошибку мы совершаем, заменяя производную разностным отношением по формуле (2)? Это легко сообразить. Напишем:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(\xi)\qquad (x<\xi<x+h).$$

Отсюда

$$\frac{m_2}{2}h\leqslant\left|f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leqslant\frac{M_2}{2}h,$$

где $m_2=\min|f''(x)|$, $M_2=\max|f''(x)|$. При $h\to 0$ ошибка стремится к нулю со скоростью h или, как говорят, формула (2) имеет *первый порядок точности*. Сложением формул (2) и (2′) получается симметричная формула:

$$f'(x)\approx\frac{1}{2h}(f(x+h)-f(x-h)). \tag{3}$$

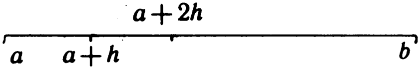
Формула (3), как легко проверить, точнее формулы (2), а именно, ошибка здесь имеет порядок h^2 — это есть формула второго порядка точности *.

Это увеличение точности получилось, так сказать, «задаром» — только за счет симметрии. Это случается очень часто. В этой лекции мы будем иметь еще несколько случаев, когда симметрия формулы повышает ее точность.

Таким образом, как правило, нужно пользоваться формулой (3) — она точнее. У этой формулы есть лишь один очевидный недостаток: она неприменима на конце отрезка (a, b), на котором задана функция.

*Ошибка формулы (3) не превосходит $\frac{1}{6}M_3h^2$, где $M_3=\max|f'''(x)|$.

Часто тем не менее бывает нужно сосчитать производную в концевой точке более точно, чем по формуле (2). Я покажу сейчас, как это можно сделать



Рассмотрим наряду с точкой a еще 2 точки: $a+h$ и $a+2h$. Обозначим значения функции в этих точках f_0, f_1, f_2 и построим формулу следующего вида:

$$f'(a) \approx \alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2.$$

Коэффициенты α, β, γ подберем так, чтобы получить второй порядок точности. Воспользуемся опять формулой Тэйлора:

$$f_1 = f_0 + hf_0' + \frac{h^2}{2} f_0'' + \ldots; \qquad f_2 = f_0 + 2hf_0' + 2h^2 f_0'' + \ldots$$

Отсюда

$$\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2 = (\alpha+\beta+\gamma) f_0 + (\beta + 2\gamma) hf_0' + \\ + \left(\frac{1}{2}\beta + 2\gamma\right) h^2 f_0'' + O(h^3).$$

Потребуем, чтобы:

$$\alpha+\beta+\gamma = 0, \qquad (\beta+2\gamma)h = 1, \qquad \frac{1}{2}\beta + 2\gamma = 0.$$

Найдя из этой системы α, β, γ, получим нужную формулу:

$$f_0' \approx \frac{1}{2h}(-f_2 + 4f_1 - 3f_0)$$

или

$$f'(a) = \frac{1}{2h}(-f(a+2h) + 4f(a+h) - 3f(a)) + O(h^2). \tag{4}$$

Таким же способом неопределенных коэффициентов можно было бы получить еще более точные формулы, но в большинстве случаев для вычисления первой производной достаточно формул (2), (3) и (4).

Замечание. То, что формула (3) точнее, чем (2), можно выразить еще несколько иначе. Запишем разностное отношение

$$\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) \quad \text{в виде} \quad \frac{1}{h}\left(f\left(\xi + \frac{h}{2}\right) - f\left(\xi - \frac{h}{2}\right)\right),$$

где $\xi = x + \dfrac{h}{2}$.

Тогда:

$$\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))=f'\left(x+\frac{h}{2}\right)+O(h^2). \qquad (5)$$

Таким образом, правая часть формулы (2) гораздо точнее дает $f'\left(x+\frac{h}{2}\right)$, чем $f'(x)$.

2. Вычисление второй производной

Чтобы получить приближенную формулу для второй производной, можно поступить так же, как при выводе формулы (4): а именно, записать выражение f_0'' с неопределенными коэффициентами через f_0, f_1, f_2 и подобрать эти коэффициенты. Если это проделать, то получится следующая формула:

$$f_0'' \approx \frac{1}{h^2}(f_2-2f_1+f_0) \quad \text{или}$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}(f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)). \qquad (6)$$

Такая формула имеет первый порядок точности. Если эту формулу «сдвинуть», используя симметрично расположенные точки, то получится более точное выражение:

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}(f(x+h)-2f(x)+f(x-h)). \qquad (7)$$

Формула (7) имеет 2 порядок точности и является самой употребительной формулой для приближенного вычисления второй производной. Если точности этой формулы нехватает (что бывает сравнительно редко), то применяются формулы, использующие большее число значений функции и имеющие 3 или 4 порядок точности. Такие формулы легко выводятся тем же способом неопределенных коэффициентов.

Замечание. В анализе вторая производная определяется посредством двух предельных переходов. Сначала находится

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))$$

и затем

$$f''(x)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}(f'(x+\alpha)-f'(x)).$$

Формула (7) (или (6)) позволяет совершить оба предельных перехода одновременно:

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}(f(x+h)-2f(x)+f(x-h)).$$

3. Приближенное нахождение определенного интеграла

Для приближенного нахождения интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ можно так же, как и для производной, исходить из определения. По определению интеграл есть предел интегральных сумм:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{8}$$

Здесь $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\delta = \max(\Delta x_i)$, $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$. В анализе доказывается, что от того, как именно разбит отрезок (a, b) на отрезки (x_i, x_{i+1}) и где выбраны ξ_i — предел не зависит *.

Чтобы получить приближенное значение интеграла, можно не совершать предельный переход и записать при малом δ:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{9}$$

Остается большой произвол в том, какие взять отрезочки Δx_i и где взять точки ξ_i. Проще всего, все отрезки (x_i, x_{i+1}) взять одинаковыми и ξ_i — в серединах этих отрезков. Обозначив

$\Delta x = h = \dfrac{b-a}{n}$, можно написать:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k), \quad \xi_k = a + kh + \frac{h}{2}. \tag{10}$$

Это и есть простейшая формула для приближенного вычисления интегралов, или простейшая *квадратурная формула*.

Формула (10) имеет простой геометрический смысл. Написав

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \quad (x_0 = a,\ x_n = b),,$$

мы можем считать, что в (10) произведена замена $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ на $f(\xi_k)\cdot h$. Это означает, что площадь криволинейной фигуры на каждом участке заменена площадью прямоугольника высоты $f(\xi_k)$.

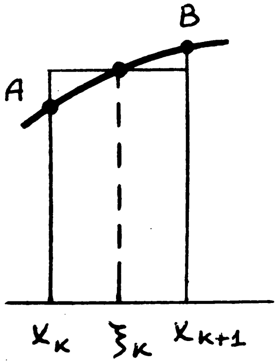
Чтобы оценить ошибку формулы (10), напишем формулу Тэйлора в окрестности ξ_k:

$$f(x) = f(\xi_k) + f'(\xi_k)(x - \xi_k) + r(x)$$

* В предположении, что $f(x)$ — непрерывна.

$$|r(x)| \leqslant \frac{1}{2} M_2 (x-\xi_k)^2;$$

$$M_2 = \max |f''(x)|.$$



Теперь имеем:

$$\int_{x_k}^{x_k+h} f(x)dx = f(\xi_k)h + \int_{x_k}^{x_k+h} r(x)dx$$

(интеграл от второго слагаемого равен нулю в силу симметрии!).

Отсюда:

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - f(\xi_k)\cdot h \right| \leqslant \frac{M_2}{24} h^3.$$

Суммируя, получаем:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_k f(\xi_k)\cdot h \right| \leqslant \frac{M_2}{24} (b-a)h^2. \qquad (11)$$

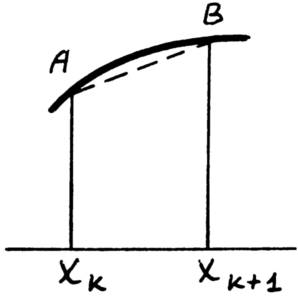
Таким образом, при $h \to 0$ ошибка при вычислении интеграла по формуле (10) для дважды дифференцируемой функции стремится к 0 со скоростью h^2, или как говорят, эта квадратурная формула имеет *2 порядок точности.*

Часто вместо значений f в серединах отрезков используют полусумму значений в концах. Просуммировав по всем отрезкам длины h, получим:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n); \quad f_k = f(x_k). \qquad (12)$$

Эта формула называется обычно «формулой трапеций»: здесь на каждом участке площадь криволинейной фигуры $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ заменяется на площадь трапеции:

$$\frac{1}{2}(f_k + f_{k+1})\cdot h.$$



Формула трапеций имеет тот же, второй порядок точности и (при малых h) дает приблизительно вдвое большую ошибку.

Заметим, что формула (10), где $f(x)$ на каждом участке приближенно заменяется константой и формула (12), где для замены используется линейная функция, дают одинаковый порядок точности (и даже (10) несколько точнее!). Эта неожиданно высокая точность формулы (10) объясняется тем, что точки ξ_k расположены точно в серединах интервалов (x_k, x_{k+1}). Снова симметрия повышает точность!

Заметим, далее, что формулу трапеций тоже можно рассматривать как некоторую интегральную сумму. Для этого достаточно разбить отрезок (a, b) на $(n+1)$ частей: два участка длины $\frac{h}{2}$ по краям, остальные длины h. После этого: $\xi_0=a$; $\xi_{n+1}=b$, все остальные $\xi_k=a+kh$ расположатся в серединах своих отрезков.

Однако, полезнее другая точка зрения на формулу трапеций, легко допускающая обобщения. В формуле трапеций мы на каждом участке $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$ функцию $f(x)$ заменили линейной функцией, а $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ на интеграл от этой линейной функции. Если вместо линейной функции, т. е. многочлена *первой* степени, рассмотреть многочлены более высокой степени, получатся более точные квадратурные формулы. Реализуем эту идею.

4. Формула Симпсона

Разобьем участок интегрирования (a, b) на n равных частей. Для каждого из полученных отрезков подберем квадратный многочлен, так чтобы он совпал с функцией в концах отрезка и в его середине. В качестве приближенного значения интеграла на этом отрезке примем значение интеграла от квадратного многочлена. Таким образом, нам понадобятся значения $f(x_k)$ в точках x_k с интервалом $h=\frac{b-a}{2n}$.

Вычисления мы проведем для одного интервала, расположив его симметрично относительно 0. (Ясно, что от положения интервала на оси x результат не зависит). Итак, должно быть: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ при $x=-h, 0, h$. Отсюда

$$\gamma=f(0), \quad \beta=\frac{1}{2h}(f(h)-f(-h)), \quad \alpha=\frac{1}{2h^2}(f(h)-2f(0)+f(-h))$$

$$\int\limits_{-h}^{h}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)dx=\frac{1}{3}h\,[f(-h)+4f(0)+f(h)].$$

Написав такие формулы для каждого из n отрезков длины $2h$ и просуммировав, получим

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(f_0+4f_1+f_2)+(f_2+4f_3+f_4)+\ldots+(f_{2n-2}+4f_{2n-1}+f_{2n})$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+\ldots+2f_{2n-2}+4f_{2n-1}+f_{2n}]. \qquad (13)$$

Это и есть квадратурная формула Симпсона; она является одной из самых употребительных.

5. Свойства формулы Симпсона

Если $f(x)$ — многочлен второй степени, то формула Симпсона (при любом h) дает точный ответ. Это, конечно, не удивительно, так как при выводе этой формулы мы $f(x)$ заменяли многочленом второй степени *.

Замечательно, что и для многочлена 3 степени эта формула является тоже точной! Это легко может быть проверено прямым вычислением, однако поучительно получить результат без вычислений. Если участок интегрирования расположен симметрично относительно 0, то для $f(x)=x^3$ точное значение интеграла $\int\limits_{-c}^{c} x^3 dx$ и значение по формуле Симпсона равны 0 (оба в силу симметрии). Значит, на таком участке формула Симпсона точна для любого многочлена 3 степени. Осталось заметить. что любой отрезок $[a, b]$ при замене $x \to x - r$, $r = \frac{a+b}{2}$ переходит в симметричный отрезок, а многочлен 3 степени снова переходит в многочлен 3 степени. Теперь ясно, что формула Симпсона имеет 4 порядок точности: на каждом участке длины $2h$ функцию можно заменить некоторым многочленом 3 степени ** с ошибкой $\sim h^4$, а для полученной кусочномногочленной функции формула, очевидно, является точной.

Ясно, далее, что ошибка зависит от величины четвертой производной функции. Однако, заранее совсем не очевидно, что в выражение для ошибки будет входить малый числовой множитель. Именно, справедлива следующая оценка

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - J_h[f] \right| \leqslant \frac{M_4}{180}(b-a)h^4; \quad M_4 = \max|f^{IV}(x)|. \tag{14}$$

Здесь $J_h[f]$ — приближенное значение интеграла по формуле Симпсона. Вы видите, что формула Симпсона оказывается гораздо точнее, чем можно было ожидать.

* 6. Старшие производные

Чтобы получить формулы для приближенного нахождения старших производных (пусь даже не очень точные), будем рас-

---

* При *фиксированном* h формула Симпсона дает точный ответ и для кусочномногочленной функции, совпадающей с разными многочленами 2 степени на каждом из участков $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ (длины $2h$).

** Например, отрезком формулы Тэйлора.

суждать следующим образом. m-ая производная от $f(x)$ есть результат применения m раз операции дифференцирования $\frac{d}{dx}=D$:

$$f'(x)=D[f],\ f''(x)=D[D[f]]=D^2[f],\ldots,\ f^{(m)}(x)=D^m[f].$$

Простейшим дискретным аналогом дифференцирования является операция D_h:

$$D_h[f]=\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))=\frac{1}{h}\Delta_h[f].$$

Мы обозначили здесь через Δ_h «первую разность» функции:

$$\Delta_h[f]=f(x+h)-f(x).$$

Естественно предположить, что простейшим дискретным аналогом m-й производной является результат m-кратного применения D_h. По определению производной

$$\lim_{h\to 0} D_h[f]=D[f].$$

Можно доказать, что при любом m

$$\lim_{h\to 0} D_h^m[f]=D^m[f].$$

При конечном h получаем приближенную формулу, имеющую первый порядок точности

$$f^{(m)}(x)\approx D_h^m[f]=\frac{1}{h^m}\Delta_h^m[f].$$

Выражение $\Delta_h^m[f]$ — результат m-кратного применения Δ_h — называется m-ой (правой) разностью функции f. m-ая разность f есть линейная комбинация значений: $f(x)$, $f(x+h),\ldots,f(x+mh)$. При $m=1,2,3$, получается:

$$\Delta_h f(x) = f(x+h)-f(x)$$
$$\Delta_h^2 f(x) = f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$$
$$\Delta_h^3 f(x) = f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)$$

и т. д. (аналогия с биноминальной формулой очевидна).

Используя симметрично расположенные значения аргумента можно (как и в случае второй производной) получить более точные формулы. Например, для четвертой производной можно написать следующие выражения:

$$f^{\mathrm{IV}}(x)\approx\frac{1}{h^4}(f_4-4f_3+6f_2-4f_1+f_0)$$

$$f^{IV}(x) \approx \frac{1}{h^4}(f_3-4f_2+6f_1-4f_0+f_{-1}); \quad f_k=f(x+kh)$$

$$f^{IV}(x) \approx \frac{1}{h^4}(f_2-4f_1+6f_0-4f_{-1}+f_{-2}).$$

Последняя формула имеет второй порядок точности.

7. Примеры дискретных задач, отвечающих задачам анализа

Умея заменять дифференцирование и интегрирование их дискретными аналогами, мы можем сводить к дискретным задачам различные задачи анализа. При этом линейным дифференциальным и интегральным уравнениям ставятся в соответствие системы (конечного числа) линейных алгебраических уравнений.

Пример 1. Разностная система, отвечающая дифференциальному уравнению 2 порядка.

Пусть требуется найти функцию $y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$y''(x)+q(x)y(x)=f(x)$$

и двум граничным условиям:

$$y(a)=\alpha, \quad y(b)=\beta.$$

Для приближенного решения этой задачи разделим отрезок $[a, b]$ на равных частей. Точки деления обозначим $x_k=a+kh$, $h=\frac{1}{n}(b-a)$. Будем искать значения функции $y(x)$ только при $x=x_k$. Записав $y''(x_k)$ при $k=1, 2, 3, \ldots, n-1$ по формуле (7), мы получим вместо дифференциального уравнения линейные алгебраические уравнения

$$\frac{1}{h^2}(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})+q_k y_k=f_k.$$

Здесь $q_k=q(x_k)$, $f_k=f(x_k)$ $(k=1, 2, 3, \ldots, n-1)$ — известные величины, y_k — неизвестные. Добавив уравнения $y_0=\alpha$ и $y_n=\beta$, мы получим систему $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными. Матрица коэффициентов этой системы имеет следующий «трехдиагональный» вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ A & B_1 & A & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & A & B_2 & A & \dots & & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A & B_{n-1} & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} A &= \frac{1}{h^2} \\ B_k &= -\frac{2}{h^2} + q_k . \end{aligned}$$

Такая система легко решается методом исключения. Решение особенно просто для случая, когда пригоден *простейший* метод исключения*. При этом в любом случае количество необходимых арифметических действий пропорционально n.

Пример 2. Сведéние линейного интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений.

Пусть требуется найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ линейному интегральному уравнению

$$y(x) + \int_a^b K(x, s)\, y(s)\, ds = f(x), \tag{15}$$

где $K(x, s)$ (ядро интегрального уравнения) и $f(x)$ — заданные функции**. При каждом фиксированном x в уравнение входит определенный интеграл

$$\int_a^b Q(s)\, ds, \quad \text{где} \quad Q(s) = Q_x(s) = K(x, s)\, y(s).$$

Заменим этот интеграл какой-нибудь квадратурной формулой

$$\int_a^b Q(s)\, ds \approx \sum_{j=1}^{n} \mu_j Q(\xi_j) \quad \text{(например, формулой Симпсона).}$$

Тогда уравнение (15) приближенно заменяется уравнением

$$y(x) + \sum_j \mu_j K(x, \xi_j)\, y(\xi_j) = f(x). \tag{16}$$

Если бы нам были известны все значения $y(\xi_j)$, то по формуле (16) можно было бы найти $y(x)$ для любого значения x.

---

* Формульная реализация простейшего метода исключения для такой системы («прогонка») приведена в лекции 2.

** Решение более простого на вид уравнения

$$\int_a^b K(x, s)\, y(s) ds = f(x)$$

(уравнение первого рода) есть гораздо более трудная задача.

Чтобы найти $y(\xi_j)$, будем рассматривать уравнение (16) *только* для значений $x=\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Мы получим тогда систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. В отличие от системы, соответствующей дифференциальному уравнению в первом примере, здесь получается система «общего вида»: все коэффициенты ее, вообще говоря, отличны от нуля.

Как решить такую систему? Если n невелико (скажем, $n \sim 15$—20), то можно воспользоваться каким-нибудь стандартным методом решения линейных систем, например, методом исключения. Если же требуется высокая точность (и потому n велико), то для разумного решения этой системы обязательно нужно использовать ее «непрерывное» происхождение (т. е. то, что f_j и y_j есть значения непрерывных функций в близких друг к другу точках). Как это делается, мы подробно рассмотрим позже.

8. Линейные дифференциальные и линейные разностные уравнения

Теперь мы оставим в стороне собственно вычислительные проблемы и проследим аналогию между линейными дифференциальными и линейными разностными уравнениями.

Для простоты рассмотрим сначала линейное уравнение второго порядка:

$$a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = f(x). \tag{17}$$

Заменим u'' и u' их дискретными аналогами по формулам (2) и (6) и будем рассматривать только значения $x=kh$. Мы получим тогда *линейное разностное уравнение:*

$$b_2(k)u_{k+2} + b_1(k)u_{k+1} + b_0(k)u_k = f_k. \tag{18}$$

Нетрудно показать, что, подбирая $a_s(x)$, можно при фиксированном h получить *любые* $b_s(k)$. Поэтому *любую* систему уравнений вида (18), независимо от ее происхождения, мы будем называть линейным разностным уравнением 2 порядка. При этом предполагается, что b_2 и b_0 не обращаются в 0, так что при каждом k уравнение захватывает 3 точки ($b_1(k)$ может обратиться в 0).

В том случае, когда b_s не зависят от k, мы будем говорить о разностном уравнении с *постоянными коэффициентами.*

Свойства разностных уравнений во многом аналогичны свойствам дифференциальных уравнений. Проследим несколько пунктов сходства.

$a_2u''+a_1u'+a_0u=f$ (19*a*) $b_2u_{k+2}+b_1u_{k+1}+b_0u_k=f_k$ (19*b*)

1) Задача Коши: $u(x)$ при $x \geqslant 0$ однозначно определяется заданием $u(0)$ и $u'(0)$*. Постановка такой задачи обосновывается теоремой существования и единственности решения.

1) Здесь естественно называть задачей Коши задание u_0 и u_1. Существование и единственность решения при $k \geqslant 0$ такой задачи очевидны из записи:

$$u_{k+2} = \frac{1}{b_2}(f_k - b_1 u_{k+1} - b_0 u_k).$$

2) Для однородного уравнения ($f(x) \equiv 0$) общее решение есть линейная комбинация двух (непропорциональных) частных решений:

$$u(x) = C_1 u^{(1)}(x) + C_2 u^{(2)}(x).$$

2) Для разностного уравнения при $f_k \equiv 0$ это тоже справедливо. Произвольное решение

$$u_k = C_1 u_k^{(1)} + C_2 u_k^{(2)}.$$

Здесь $u_k^{(1)}$ и $u_k^{(2)}$ — любые два решения (18). Например, можно определить $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ условиями Коши:

$$u_0^{(1)} = 1 \qquad u_0^{(2)} = 0$$
$$u_1^{(1)} = 0 \qquad u_1^{(2)} = 1.$$

Тогда

$$C_1 = u_0, \qquad C_2 = u_1.$$

3) Для уравнения (19а) с *постоянными* коэффициентами существуют решения вида:

$$u(x) = e^{\lambda x} = \mu^x,$$

где λ — корень уравнения

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \,. \qquad (20а)$$

Если (20а) имеет некратные корни, то общее решение *однородного* уравнения (19а) имеет вид:

$$u(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

3) Для уравнения (19б) с *постоянными* коэффициентами существуют решения вида $u_k = \mu^k$, где μ — корень уравнения

$$b_2\mu^2 + b_1\mu + b_0 = 0 \qquad (20б)$$

Если уравнение (20б) имеет некратные корни, то общее решение *однородного* уравнения (19б) имеет вид:

$$u_k = C_1 \mu_1^k + C_2 \mu_2^k.$$

Аналогию эту можно продолжить и углубить, рассмотрев вместо задачи Коши — краевые задачи, случай кратных корней характеристического уравнения и т. д.

---

* Разумеется, вместо 0 можно взять любое значение x_0.

Пока мы этого делать не будем и лишь кратко обсудим общий случай — линейное разностное уравнение n-го порядка. Общий вид такого уравнения

$$\sum_{s=0}^{n} b_s(k) u_{k+s} = f_k \qquad (b_0(k) \neq 0,\ b_n(k) \neq 0).$$

При каждом k в уравнении участвуют $n+1$ значение u_k *. При постоянных $b_s(k) = b_s$ и $f_k = 0$ опять существуют частные решения вида $u_k = \mu^k$, где μ — корень характеристического уравнения:

$$\sum_{s=0}^{n} b_s \mu^s = 0.$$

«Задача Коши» для такого разностного уравнения ставится так. Заданы $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$. Ищутся u_k при всех $k > n-1$. Задача эта, очевидно, имеет решение и притом только одно.

9. Три примера

1) Рассмотрим последовательность целых чисел, определенную следующим правилом. Первые два равны 1; каждое следующее есть сумма двух предыдущих:

$$u_0 = u_1 = 1; \quad u_{k+2} = u_k + u_{k+1}.$$

Эта знаменитая последовательность обладает многими интересными свойствами и называется «числа Фибоначчи».**

С нашей сегодняшней точки зрения соотношение $u_{k+2} = u_k + u_{k+1}$ есть разностное уравнение 2 порядка с постоянными коэффициентами. Условие $u_0 = u_1 = 1$ есть задача Коши для этого уравнения. Решив эту задачу, мы получим явные формулы для u_k.

Общее решение уравнения $u_{k+2} = u_k + u_{k+1}$ имеет вид: $u_k = C_1 \mu_1^k + C_2 \mu_2^k$, где μ_j — корни характеристического уравнения $\mu^2 - \mu - 1 = 0$:

$$\mu_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \mu_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

---

* Впрочем, внутренние коэффициенты — $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ вполне могут обращаться в 0.

** Последовательность эта впервые была рассмотрена Леонардо Фибоначчи в 13 веке, в связи с (сильно идеализированной) задачей о размножении кроликов. Это есть, таким образом, первое применение математики к биологии!

Из начальных данных находим

$$C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \qquad C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, k-ое число Фибоначчи задается следующей формулой:

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right].\ *$$

Замечательно, что для задания последовательности целых чисел нужно использовать иррациональные числа!

2) В качестве второго примера рассмотрим разностное уравнение, которое произошло из дифференциального. Пусть

$$u'(x) = au(x), \qquad u(0) = 1. \tag{21}$$

Решение этой задачи Коши есть $u(x) = e^{ax}$. Перейдем к разностной задаче Коши:

$$\frac{1}{h}(u_{k+1} - u_k) = au_k; \quad u_0 = 1. \tag{22}$$

Из уравнения (22) $u_{k+1} = (1+ah)u_k$, т. е.

$$u_k = (1+ah)^k = \mu^k.$$

Попробуем установить соответствие между решениями дифференциального и разностного уравнения. Для этого запись (22) неудобна — в ней не указано значение x.

Определим функцию $\tilde{u}(x) = \tilde{u}_h(x)$ для дискретного набора значений $x = x_k = kh$: $\tilde{u}(x_k) = u_k$. Уравнение (22) переписывается в виде:

$$\frac{1}{h}[\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)] = a\tilde{u}(x), \tag{22}$$

а решение u_k в виде $\tilde{u}(x) = (1+ah)^{x/h}$.

Теперь зафиксируем x и устремим h к 0: $\tilde{u}_h(x) = (1+ah)^{x/h} \to$ $\to e^{ax} = u(u)$**. Мы видим, что в этом примере все обстоит «бла-

---

* Эта формула была впервые написана через несколько столетий после Фибоначчи!

** $\frac{x}{h}$ не обязано быть целым. Поэтому точнее писать так:

$$\max_x |\tilde{u}_h(x) - u(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Здесь максимум берется по всем x, в которых определена функция $\tilde{u}(x)$.

гополучно»: решение разностного уравнения $\tilde{u}_h(x)$ при уменьшении h стремится к решению дифференциального.

Последнее замечание. Формула (22) есть запись простейшего метода интегрирования дифференциальных уравнений — метода Эйлера — для уравнения (21). Мы убедились, что здесь при $h \to 0$ приближенное решение, полученное по методу Эйлера, сходится к точному. Разность $u - \tilde{u}$, как легко убедиться, имеет порядок h.

3) Пусть снова $u'(x) = au(x)$.

Для построения разностного уравнения воспользуемся более точной формулой для производной:

$$u'(x) \approx \frac{1}{2h}(u(x+h) - u(x-h)).$$

Получим

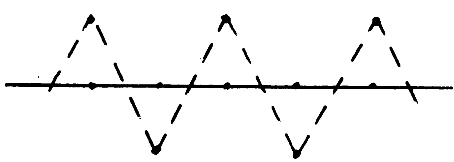
$$\frac{1}{2h}(u_{k+1} - u_{k-1}) = au_k, \quad u_0 = 1 \tag{23}$$

или

$$\frac{1}{2h}(\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x-h)) = a\tilde{u}(x), \quad \tilde{u}(0) = 1. \tag{23}$$

Обратите внимание на радикальное отличие формулы (23) от (22). Уравнение (23) имеет второй порядок, стало быть — *два* линейно независимых решения. Возьмем в качестве таких решений $u_k^{(1)} = \mu_1^k$ и $u_k^{(2)} = \mu_2^k$, где μ_1 и μ_2 — корни характеристического уравнения $\mu^2 - 2ah\mu - 1 = 0$. При малых h $\mu_1 \approx 1$, $\mu_2 \approx -1$.

Рассмотрим сначала частное решение $u_k^{(2)} = \mu_2^k$ ($\mu_2 < 0$) или $\tilde{u}^{(2)}(x) = \mu_2^{x/h}$. При малом h $\tilde{u}^{(2)}(x)$ сильно осциллирует и при $h \to 0$ ни к чему не стремится! В то же время легко проверяется, что $\tilde{u}_1(x) = \mu_1^{x/h}$ при $h \to 0$ сходится к $u(x) = e^{ax}$.



Мы видим, что из-за повышения порядка разностное уравнение богаче дифференциального. У него есть решение, переходящее в пределе в гладкую функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению, но есть и «паразитическое» решение, которому ничего не отвечает в пределе (при $h \to 0$).

Заметим в заключение, что, если мы захотим решить задачу Коши для (23), то нужно задать кроме u_0 еще u_1. Если наугад задать u_1, то решение (23), конечно, не будет при $h \to 0$ приближаться к e^{ax}. Чтобы такое приближение имело место, нужно задать $u_1 = u_0$, или при $h \to 0$ u_1 приближать к u_0.