Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

3

Отдельный оттиск

1 9 7 7

УДК 517.9

В. Ю. Лунин

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ГЛАВНЫМ ЧЛЕНОМ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В ограниченной области $G\subset\mathbf{R}^n$ с границей $\Gamma=\partial G$ класса C^3 рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\varepsilon(u)\equiv-\varepsilon^p\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}A_p\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)+F(x,\ u)=0, & (1)\\ u|_\Gamma=0, & (2)\end{cases}$$

где $x=(x_1,\ ...,\ x_n)$, $A_p(t)=|t|^{p-2}t$, $p>n$, $p\geqslant4$, $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$ — малый параметр.

Будем предполагать, что $F(x,\ u)\in C^3(\bar G\times\mathbf{R}^1)$, причем

$$\frac{\partial}{\partial u}F(x,\ u)\geqslant\alpha^2>0. \tag{3}$$

В статье показывается, что главный член асимптотики решения задачи (1)—(2), построенный методом М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [1, 2], дает равномерное в $\bar G$ приближение решения.

1. Известно, что задача (1)—(2) при любом $\varepsilon>0$ имеет единственное решение $u_\varepsilon(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_p(G)$ (см., например, [3]).

Поскольку $p>n$, имеет место вложение $\overset{\circ}{W}{}^1_p(G)\subset C(\bar G)$, то есть решение задачи (1)—(2) $u_\varepsilon(x)\in C(\bar G)$.

Замечание 1. Условие $p\geqslant4$ не существенно и введено для упрощения изложения. С некоторыми изменениями доказательство проходит и в случае $2<p<4$, $p>n$.

Рассмотрим сначала вырожденное уравнение

$$F(x,\ u)=0, \tag{4}$$

которое в силу условия (3) имеет единственное решение $u_0(x)\equiv h(x)\in C(\bar G)$, не удовлетворяющее, вообще говоря, граничным условиям (2).

Для построения функции $U(\varepsilon,\ x)$, компенсирующей невязку в выполнении граничных условий, перейдем в окрестности границы к новым локальным координатам.

Пусть граница Γ покрыта конечным числом N окрестностей Γ^k, гомеоморфных шару в $\mathbf{R}^{n-1}$, с локальными координатами $\varphi^k=(\varphi^k_1,\ ...\ ...,(\varphi^k_{n-1}),\varphi^k\in\Phi^k$. Пусть S — такое семейство трансверсалей к Γ (например семейство нормалей), что в некоторой окрестности Γ через каждую точку $x\in G$ проходит ровно одна кривая s_x из S, и пусть $\rho(x)$ — расстояние от x до Γ вдоль s_x.

Обозначим Γ_η^k множество точек $x \in \bar{G}$, для которых $\rho(x) \leqslant \eta$ и точка пересечения s_x с Γ принадлежит Γ^k. Пусть $\varphi^k(x)$ — координаты точки пересечения s_x с Γ. Положим $\Gamma_\eta = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \Gamma_\eta^k$.

В силу гладкости Γ координаты φ^k и семейство S могут быть выбраны так, что функции

$$c_{0i}^k(\rho, \varphi^k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \rho \,|_{x=x(\rho,\varphi^k)}, \quad c_{ji}^k(\rho, \varphi^k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_j^k \,|_{x=x(\rho,\varphi^k)}$$

принадлежат классу $C^2([0, 3\eta] \times \overline{\Phi}^k)$.

Рассмотрим произвольную окрестность Γ_η^k опустив для краткости верхний индекс k.

Перейдем в этой окрестности в уравнении (1) к новым координатам (ρ, φ), сделаем регуляризующее растяжение $\rho = \varepsilon\xi$ и положим

$$u_\varepsilon(x) = h(x(\varepsilon\xi, \varphi)) + r(\xi, \varphi) + \varepsilon r^1(\varepsilon, \xi, \varphi).$$

Тогда, положив $\varepsilon = 0$, получим уравнение для «главной» части погранслойной поправки:

$$-\delta(\varphi) \frac{d}{d\xi} A_p\left(\frac{dr}{d\xi}\right) + g(r, \varphi) = 0, \tag{5}$$

где

$$g(r, \varphi) = F(x(0, \varphi), h(x(0, \varphi) + r)), \quad \delta(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} |c_{0i}(0, \varphi)|^p > 0.$$

Для компенсации невязки в выполнении граничных условий и для того, чтобы пограничный слой убывал во внутренних точках G, потребуем выполнения условий

$$r(0, \varphi) = r_0(\varphi) \equiv -h(x(0, \varphi)), \quad \lim_{\xi \to +\infty} r(\xi, \varphi) = 0. \tag{6}$$

Уравнение (5) посредством замены $r'_\xi = a(r)$ приводится к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. Решая его, можно видеть, что единственное в классе $W_p^1(\mathbf{R}^+ \times \Phi)$ решение задачи (5)—(6) определяется из соотношения

$$\xi = \left| \int\limits_r^{r_0(\varphi)} \left(\frac{p}{p-1} \delta^{-1}(\varphi) \int\limits_0^\tau g(s, \varphi)\, ds \right)^{-\frac{1}{p}} d\tau \right| \quad \text{при} \quad \xi \in [0, \beta(\varphi)) \tag{7}$$

и $r(\xi, \varphi) \equiv 0$ при $\xi \geqslant \beta(\varphi)$, где

$$\beta(\varphi) = \left| \int\limits_0^{r_0(\varphi)} \left(\frac{p}{p-1} \delta^{-1}(\varphi) \int\limits_0^\tau g(s, \varphi)\, ds \right)^{-\frac{1}{p}} d\tau \right| \leqslant \beta_0 < +\infty.$$

Пусть ε_0 таково, что $\varepsilon_0\beta_0 < \eta$. Построим в каждой окрестности Γ_η^k функцию $r^k(\xi, \varphi^k)$ как решение задачи (5)—(6) и определим пограничный слой по формуле

$$U(\varepsilon, x) = \begin{cases} r^k\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho(x), \varphi^k(x)\right) & \text{в } \Gamma_\eta^k, \\ 0 & \text{в } G \setminus \Gamma_\eta. \end{cases} \tag{8}$$

Основным результатом данной статьи является следующая

Теорема. Пусть $u_\varepsilon(x)$ — обобщенное решение задачи (1)—(2). Тогда

$$u_\varepsilon(x) = h(x) + U(\varepsilon, x) + z(\varepsilon, x),$$

где $h(x)$ — решение вырожденного уравнения (4); $U(\varepsilon, x)$ определяется по формуле (8);

$$|z(\varepsilon, x)| \leqslant C\varepsilon \text{ в } G, \ C \text{ не зависит от } \varepsilon. \tag{9}$$

Замечание 2. Подчеркнем, что в отличие от линейного случая [1], где пограничный слой убывает экспоненциально при $\varepsilon \to 0$, в рассматриваемом случае погранслойная поправка $U(\varepsilon, x)$ тождественно равна нулю вне области, стягивающейся к границе при $\varepsilon \to 0$.

Замечание 3. Из соотношения (7) можно видеть, что в точках вида $(0, \varphi_0)$, где $r_0(\varphi_0) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial \varphi_j} r_0(\varphi_0) \neq 0$, функция $\frac{\partial}{\partial \varphi_j} r(\xi, \varphi)$ терпит разрыв. Кроме того, при $p \geqslant 4$ в точках вида $(\beta(\varphi), \varphi)$ терпит разрыв функция $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} r(\xi, \varphi)$. Таким образом, пограничный слой $U(\varepsilon, x)$, вообще говоря, не гладок.

2. Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы мы воспользуемся принципом максимума в следующей форме.

Лемма 1. Пусть $u_\varepsilon(x)$ — решение задачи (1)—(2), а $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ — некоторое семейство функций из $C^2(\bar{G})$. Тогда

$$\max_{x \in \bar{G}} |u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x)| \leqslant \max \left(\frac{1}{\alpha^2} \max_{x \in \bar{G}} |\mathcal{M}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)|, \ \max_{x \in \partial G} |\tilde{u}_\varepsilon| \right). \tag{10}$$

Доказательство леммы 1 будет дано ниже.

Мы не можем применить лемму 1 непосредственно к семейству функций $(h(x) + U(\varepsilon, x))$, так как в силу замечания 3 $U(\varepsilon, x)$ не имеет требуемой гладкости. Поэтому вместе с задачей (5)—(6) для определения пограничного слоя рассмотрим регуляризованную задачу:

$$\begin{cases} -\delta(\varphi) \frac{d}{d\xi} A_p\left(\frac{dt}{d\xi}\right) - \mu \frac{d^2 t}{d\xi^2} + g(t, \varphi) = 0, & (11) \\ t(0, \varphi) = t_0(\varphi) \equiv -h(x(0, \varphi)), \ \lim\limits_{\xi \to +\infty} t(\xi, \varphi) = 0, & (12) \end{cases}$$

где $\mu = \varepsilon^{p-2}$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. При любых $\varphi \in \Phi$, $\mu > 0$ задача (11)—(12) имеет единственное в классе $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\mathbf{R}^+ \times \Phi)$ решение $t(\xi, \varphi)$. При этом $t(\xi, \varphi) \in C^2(\mathbf{R}^+ \times \Phi)$ и

$$|t(\xi, \varphi)| \leqslant |t_0(\varphi)| e^{-d^2 \xi}, \qquad d > 0; \tag{13}$$

$$|t'_\xi(\xi, \varphi)| \leqslant C |t(\xi, \varphi)|^{\frac{2}{p}}, \quad |t'_\xi(\xi, \varphi)| \leqslant C\mu^{-\frac{1}{2}} |t(\xi, \varphi)|, \quad |t'_{\varphi_k}(\xi, \varphi)| \leqslant C; \tag{14}$$

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} t(\xi, \varphi)}{\partial \xi^{\alpha_0} \partial \varphi_k^{\alpha_1} \partial \varphi_j^{\alpha_2}} \right| \leqslant C\mu^{-\frac{|\alpha|-1}{2}} \left(\frac{1}{|t_0(\varphi)|} + \xi \right)^{\alpha_1 + \alpha_2} |t'_\xi(\xi, \varphi)| \text{ для } |\alpha| = 1, 2; \tag{15}$$

$$|t'_\xi(\xi, \varphi)|^s \left| \frac{\partial^{|\alpha|} t(\xi, \varphi)}{\partial \xi^{\alpha_0} \partial \varphi_k^{\alpha_1} \partial \varphi_j^{\alpha_2}} \right| \leqslant C \left(\frac{1}{|t_0(\varphi)|} + \xi \right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \tag{16}$$

при $s \geqslant \frac{p}{2} - 2$ для $|\alpha| = 2$;

$$|t'_\xi(\xi, \varphi)|^s \left| \frac{\partial^{|\alpha|} t(\xi, \varphi)}{\partial \xi^{\alpha_0} \partial \varphi_k^{\alpha_1} \partial \varphi_j^{\alpha_2}} \right| \leqslant C \quad \text{при} \quad s \geqslant \frac{p}{2} - 2 + \alpha_1 + \alpha_2, \quad |\alpha| = 2. \tag{17}$$

Лемма 2 будет доказана ниже.

Оценки (15)—(16) портятся при φ, таких, что $t_0(\varphi) = 0$. Поэтому для того, чтобы применить лемму 1, мы исправим функцию $t(\xi, \varphi)$ в окрестности точек (ξ, φ), для которых $t_0(\varphi) = 0$. Пусть $\psi(x)$ — гладкая функция, такая, что $\psi(x) \equiv 1$ в Γ_η, $\psi(x) \equiv 0$ в $G \setminus \Gamma_{2\eta}$. Пусть $\chi(\tau)$ — гладкая функция от $\tau \in \mathbf{R}^1$, такая, что $\chi(\tau) \equiv 1$ для $|\tau| > 2$, $\chi(\tau) \equiv 0$ при $|\tau| \leqslant 1$ и $0 \leqslant \chi(\tau) \leqslant 1$. Введем вспомогательную функцию $V_\mu(\varepsilon, x)$:

$$V_\mu(\varepsilon, x) = \begin{cases} \psi(x) \chi\left(\frac{1}{\varepsilon} t_0^k(\varphi^k(x))\right) t^k\left(\frac{1}{\varepsilon} \rho(x), \varphi^k(x)\right) & \text{в} \quad \Gamma_{2\eta}^k, \\ 0 \quad \text{в} \quad G \setminus \Gamma_{2\eta}. \end{cases} \tag{18}$$

Мы можем получить теперь требуемую оценку (9), если применим лемму 1 к семейству функций $(h(x) + V_\mu(\varepsilon, x))$ и воспользуемся следующими леммами:

Лемма 3. Пусть $V_\mu(\varepsilon, x)$ определено формулой (18); тогда

$$|\mathcal{M}_\varepsilon(h(x) + V_\mu(\varepsilon, x))| \leqslant C\varepsilon \quad \text{при } x \in G, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \ \mu = \varepsilon^{p-2}.$$

Лемма 4. Пусть $U(\varepsilon, x)$ и $V_\mu(\varepsilon, x)$ определены формулами (8) и (18) соответственно. Тогда

$$|U(\varepsilon, x) - V_\mu(\varepsilon, x)| \leqslant C\varepsilon \quad \text{при} \quad x \in G, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad \mu = \varepsilon^{p-2}.$$

3. Доказательство лемм.

Доказательство леммы 1. Поскольку $u_\varepsilon(x)$ не принадлежит, вообще говоря, $C^2(\bar{G})$, мы рассмотрим вместе с задачей (1)—(2) регуляризованную задачу:

$$\mathcal{M}_\varepsilon(w) + \lambda(\varepsilon) \mathcal{N}(w) = 0, \quad w|_\Gamma = 0, \tag{19}$$

где функция $\lambda(\varepsilon) > 0$ будет выбрана позже,

$$\mathcal{N}(w) \equiv -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} B_i(\nabla w), \quad B_i(\nabla w) = \left(1 + \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial w}{\partial x_j}\right|^{p-2}\right) \frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

Задача (19) имеет решение $w_\varepsilon(x) \in C^2(\bar{G})$ и

$$\max_{x \in \bar{G}} |w_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x)| \leqslant \max\left(\frac{1}{\alpha^2} \max_{x \in \bar{G}} |\mathcal{M}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) + \lambda(\varepsilon) \mathcal{N}(\tilde{u}_\varepsilon)|, \ \max_{x \in \partial G} |\tilde{u}_\varepsilon|\right) \tag{20}$$

(см. [4], гл. IV, теорема 10.3 и следствие 8.1). Покажем, что для произвольного $\delta > 0$ мы можем выбрать $\lambda(\varepsilon)$ так, что

$$\lambda(\varepsilon) \max_{x \in \bar{G}} |\mathcal{N}(\tilde{u}_\varepsilon)| \leqslant \delta \max\left(\frac{1}{\alpha^2} \max_{x \in \bar{G}} |\mathcal{M}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)|, \ \max_{x \in \partial G} |\tilde{u}_\varepsilon|\right), \tag{21}$$

$$\max_{x \in \bar{G}} |w_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x)| \leqslant \delta \max\left(\frac{1}{\alpha^2} \max_{x \in \bar{G}} |\mathcal{M}_\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon)|, \ \max_{x \in \partial G} |\tilde{u}_\varepsilon|\right), \tag{22}$$

откуда в силу (20) и произвольности δ будет следовать оценка (10).

Возможность такого выбора $\lambda(\varepsilon)$, что имеет место оценка (21), очевидна. Оценим $|w_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(x)|$ в G. Заметим, что для $u, v\in \overset{\circ}{W}{}_p^1(G)$ справедлива оценка

$$\langle M_\varepsilon(u)-M_\varepsilon(v),\quad u-v\rangle\equiv$$

$$\equiv\varepsilon^p\sum_{i=1}^n\int_G\left[A_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-A_p\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx+$$

$$+\int_G[F(x,\ u)-F(x,\ v)](u-v)\,dx\geqslant$$

$$2^{1-p}\varepsilon^p\sum_{i=1}^n\int_G\left|\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\right|^p dx+\alpha^2\int_G(u-v)^2\,dx,$$

а для решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (1)—(2) выполняется условие

$$|\langle M_\varepsilon(u)-M_\varepsilon(v),\quad u-v\rangle|=|\langle -M_\varepsilon(v),\quad u-v\rangle|=$$

$$=\left|-\varepsilon^p\sum_{i=1}^n\int_G A_p\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\frac{\partial(u_\varepsilon-v)}{\partial x_i}\,dx-\int_G F(x,\ v)(u_\varepsilon-v)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^p\sum_{i=1}^n\int_G\left|A_p\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}dx+2^{-p}\varepsilon^p\sum_{i=1}^n\int_G\left|\frac{\partial(u_\varepsilon-v)}{\partial x_i}\right|^p dx+$$

$$+C\int_G|F(x,\ v)|^2\,dx+\frac{\alpha^2}{2}\int_G(u_\varepsilon-v)^2\,dx.$$

Поэтому

$$2^{-p}\varepsilon^p\sum_{i=1}^n\int_G\left|\frac{\partial(u_\varepsilon-v)}{\partial x_i}\right|^p dx+\frac{\alpha^2}{2}\int_G(u_\varepsilon-v)^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^p\sum_{i=1}^n\int_G\left|A_p\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}dx+C\int_G|F(x,\ v)|^2\,dx. \tag{23}$$

При $v\equiv 0$ имеем

$$\sum_{i=1}^n\int_G\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|^p dx\leqslant C\varepsilon^{-p}, \tag{24}$$

где C не зависит от ε. Аналогично тому, как была выведена оценка (23), получим, что если $u\ (x)$ — решение задачи (1)—(2), а $w_\varepsilon(x)$ — решение задачи (19), то

$$2^{-p}\varepsilon^p\sum_{i=}^n\int_G\left|\frac{\partial(u_\varepsilon-w_\varepsilon)}{\partial x_i}\right|^p dx+\alpha^2\int_G(u_\varepsilon-w_\varepsilon)^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C(\varepsilon^{-1}\lambda(\varepsilon))^{\frac{p}{p-1}}\sum_{i=1}^n\int_G|B_p(\nabla u_\varepsilon)|^{\frac{p}{p-1}}dx.$$

Отсюда в силу оценки (24) и непрерывности вложения $\mathring{W}_p^1(G)\subset C(\overline{G})$ следует

$$\max_{x\in\overline{G}}|\omega_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(x)|\leqslant C(\varepsilon^{-p}\lambda(\varepsilon))^{\frac{1}{p-1}}.$$

Это показывает возможность такого выбора $\lambda(\varepsilon)$, чтобы выполнялась оценка (22). Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Уравнение (11) приводится к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. Действительно, нетрудно видеть, что мы удовлетворим уравнению (11), если выберем $t(\xi,\varphi)$ как решение задачи

$$\frac{dt}{d\xi}=-H(t,\varphi),\quad t(0,\varphi)=t_0(\varphi),\tag{25}$$

где

$$H(t,\varphi)=\operatorname{sgn}t\sqrt{b(t,\varphi)},\tag{26}$$

а $b(t,\varphi)\geqslant 0$ определяется из соотношения

$$\frac{p-1}{p}\delta(\varphi)b^{\frac{p}{2}}+\frac{1}{2}\mu b-\int_0^t g(\tau,\varphi)\,d\tau=0.\tag{27}$$

Будем считать, не оговаривая этого особо, что

$$\xi\in\mathbf{R}^+,\quad \varphi\in\Phi,\quad \mu\in(0,\mu_0],\quad |t|\leqslant T=\sup_{\varphi\in\Phi}|t_0(\varphi)|<\infty.$$

Поскольку $g(0,\varphi)=0$ и $g_t'(t,\varphi)\geqslant\alpha^2>0$, то соотношения (26) и (27) однозначно определяют функцию $H(t,\varphi)\in C^2(\mathbf{R}^1\times\Phi)$. При этом из (27) следует

$$H(t,\varphi)=|b(t,\varphi)|^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\delta^{-1}(\varphi)\int_0^t g(\tau,\varphi)\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C|t|^{\frac{2}{p}}.\tag{28}$$

Так как

$$H_t'(t,\varphi)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}t\frac{b_t'(t,\varphi)}{\sqrt{b(t,\varphi)}}=$$

$$=\frac{1}{2}|g(t,\varphi)|\left(\frac{p-1}{2}\delta(\varphi)b^{\frac{p}{2}}+\frac{1}{2}\mu b\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\delta(\varphi)b^{\frac{p}{2}-1}+\frac{1}{2}\mu\right)^{-\frac{1}{2}}\tag{29}$$

и так как, учитывая равенство (27), имеем

$$\frac{|g(t,\varphi)|}{\sqrt{2p}\left(\int_0^t g(\tau,\varphi)\,d\tau\right)^{1/2}}\leqslant\frac{1}{2}\frac{|g(t,\varphi)|}{\left(\frac{p-1}{2}\delta(\varphi)b^{p/2}+\frac{1}{2}\mu b\right)^{1/2}}\leqslant\frac{|g(t,\varphi)|}{2\left(\int_0^t g(\tau,\varphi)\,d\tau\right)^{1/2}},$$

то

$$0<d^2\leqslant H_t'(t,\varphi)\leqslant C\mu^{-1/2},\tag{30}$$

где d и C не зависят от μ.

Выписав $H'_{\varphi_k}(t, \varphi)$ и $H''_{\varphi_k\varphi_j}(t, \varphi)$, аналогично тому, как это сделано для $H'_t(t, \varphi)$, можно получить оценки

$$|H'_{\varphi_k}(t, \varphi)| \leqslant C|H(t, \varphi)| \quad \text{и} \quad |H''_{\varphi_k\varphi_j}(t, \varphi)| \leqslant C|H(t, \varphi)|. \tag{31}$$

Вернемся к задаче (25). В силу установленных свойств функции $H(t, \varphi)$ задача (25) имеет единственное решение $t(\xi, \varphi) \in C^2(\mathbf{R}^+ \times \Phi)$, которое монотонно изменяется от $t_0(\varphi)$ до 0 при изменении ξ от 0 до $+\infty$. Более того, поскольку $H(t, \varphi) = tH'_t(\tau, \varphi)$, где $|\tau| \leqslant T$, из (30) и теоремы сравнения для обыкновенных дифференциальных уравнений следует оценка (13). Из соотношений (28), (29) и (30) следуют сразу две первые оценки (14), а также оценки

$$|t''_{\xi\xi}(\xi, \varphi)| = |-H'_t(t, \varphi)\, t'_\xi(\xi, \varphi) \leqslant C\mu^{-\frac{1}{2}} |t'_\xi(\xi, \varphi)|$$

и

$$|t'_\xi(\xi, \varphi)|^s |t''_{\xi\xi}(\xi, \varphi)| = |b(t, \varphi)|^{\frac{s+1}{2}} H'_t(t, \varphi) \leqslant C$$

при $\frac{s+1}{2} \geqslant \frac{p-2}{4}$, то есть при $s \geqslant \frac{p}{2} - 2$.

Выписав для производных функций $t(\xi, \varphi)$ по параметрам φ_k уравнения в вариациях и использовав первую из оценок (31), нетрудно получить третью оценку (14).

Заметим далее, что решение $t(\xi, \varphi)$ задачи (25) удовлетворяет соотношению

$$\xi = B(t, \varphi) \equiv \int_t^{t_0(\varphi)} \frac{d\tau}{H(\tau, \varphi)}. \tag{32}$$

При этом в силу оценок (30) и (31)

$$|B'_{\varphi_k}(t, \varphi)| = \left| \frac{\frac{\partial}{\partial\varphi_k} t_0(\varphi)}{H(t_0(\varphi), \varphi)} - \int_t^{t_0(\varphi)} \frac{H'_{\varphi_k}(\tau, \varphi)}{H^2(\tau, \varphi)} d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left|\frac{\partial}{\partial\varphi_k} t_0(\varphi)\right|}{d^2 |t_0(\varphi)|} + \operatorname{sgn} t \int_t^{t_0(\varphi)} \left| \frac{H'_{\varphi_k}(\tau, \varphi)}{H^2(\tau, \varphi)} \right| d\tau \leqslant C\left(\frac{1}{|t_0(\varphi)|} + \xi\right) \tag{33}$$

и, аналогично,

$$|B''_{\varphi_k\varphi_j}(t, \varphi)| \leqslant C\mu^{-1/2}\left(\frac{1}{|t_0(\varphi)|^2} + \xi\right). \tag{34}$$

Так как из (32) следует, что

$$t'_{\varphi_k}(\xi, \varphi) = -\frac{B'_{\varphi_k}(t, \varphi)}{B'_t(t, \varphi)} = H(t, \varphi)\, B'_{\varphi_k}(t, \varphi)$$

и, аналогично,

$$t''_{\xi\varphi_k}(\xi, \varphi) = H(t, \varphi)\left[-H'_t(t, \varphi) B'_{\varphi_k}(t, \varphi) - \frac{H'_{\varphi_k}(t, \varphi)}{H(t, \varphi)}\right], \tag{35}$$

$$t''_{\varphi_k\varphi_j}(\xi,\ \varphi) = H(t,\ \varphi)\Big[H'_t(t,\ \varphi)B'_{\varphi_k}(t,\ \varphi)B'_{\varphi_j}(t,\ \varphi) +$$

$$+\frac{H'_{\varphi_k}(t,\ \varphi)}{H(t,\ \varphi)}B'_{\varphi_j}(t,\ \varphi) + \frac{H'_{\varphi_j}(t,\ \varphi)}{H(t,\ \varphi)}B'_{\varphi_k}(t,\ \varphi) + B''_{\varphi_k\varphi_j}(t,\ \varphi)\Big], \quad (36)$$

то из (29), (30), (31), (34) и (35) вытекают оценки (15) и (16).

По доказанному выше

$$|t'_{\varphi_j}(\xi,\ \varphi)| = |H(t,\ \varphi)B'_{\varphi_j}(t,\ \varphi)| \leqslant C.$$

Поэтому из (35) и (36) получаем оценки (17). Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. В области $G\setminus\Gamma_{2\eta}$ имеем $V_\mu(\varepsilon,\ x)\equiv 0$. Поэтому

$$\mathcal{M}_\varepsilon(h(x) + V_\mu(\varepsilon,\ x)) = -\varepsilon^p\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_p\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right),$$

откуда следует, что

$$|\mathcal{M}_\varepsilon(h(x) + V_\mu(\varepsilon,\ x))| \leqslant C\varepsilon^p \quad \text{в} \quad G\setminus\Gamma_{2\eta}. \quad (37)$$

Рассмотрим произвольную окрестность $\Gamma^k_{2\eta}$ и обозначим

$$\Omega_1 = \{x\in\Gamma^k_\eta : |t_0(\varphi)| \geqslant 2\varepsilon\}, \quad \Omega_2 = \{x\in\Gamma^k_\eta : \varepsilon < |t_0(\varphi)| < 2\varepsilon\},$$

$$\Omega_3 = \{x\in\Gamma^k_{2\eta}\setminus\Gamma^k_\eta : |t_0(\varphi)| > \varepsilon\}, \quad \Omega_4 = \Gamma^k_{2\eta}\setminus\bigcup_{i=1}^{3}\Omega_i.$$

Поскольку в Ω_4 имеем $V_\mu(\varepsilon,\ x)\equiv 0$, там сохраняется оценка (37). В Ω_3 из оценок (13), (14), (15) следует, что

$$|D^\alpha_x V_\mu(\varepsilon,\ x)| \leqslant C\varepsilon^{-2}\mu^{-\frac{1}{2}}e^{-d_1^2\frac{\eta}{\varepsilon}} \leqslant C\varepsilon^K, \quad (38)$$

где $|\alpha|\leqslant 2$, $0 < d_1 < \sqrt{\frac{2}{p}}\,d$, $K > 0$ произвольно. Поэтому в Ω_3 сохраняется оценка (37).

Рассмотрим множество Ω_1. Из оценок (13)—(17) следует, что в Ω_1

$$\max(|t(\xi,\ \varphi)|,\ |t'_\xi(\xi,\ \varphi)|,\ \max_k|t'_{\varphi_k}(\xi,\ \varphi)|) \leqslant C; \quad (39)$$

$$\max(|t''_{\xi\xi}(\xi,\ \varphi)|,\ \max_k|\varepsilon t''_{\xi\varphi_k}(\xi,\ \varphi)|,\ \max_{k,j}|\varepsilon^2 t''_{\varphi_k\varphi_j}(\xi,\ \varphi)|) \leqslant C\mu^{-\frac{1}{2}} = C\varepsilon^{-\frac{p-2}{2}}; \quad (40)$$

$$|t'_\xi(\xi,\ \varphi)|^s\max(|t''_{\xi\xi}(\xi,\ \varphi)|,\ \max_k|\varepsilon t''_{\xi\varphi_k}(\xi,\ \varphi)|,\ \max_{k,j}|\varepsilon^2 t''_{\varphi_k\varphi_j}(\xi,\ \varphi)|) \leqslant C$$

$$\text{для} \quad s \geqslant \frac{p}{2} - 2; \quad (41)$$

$$|t'_\xi(\xi,\ \varphi)|^{p-2}\max(\max_k|t''_{\xi\varphi_k}(\xi,\ \varphi)|,\ \max_{k,j}|t''_{\varphi_k\varphi_j}(\xi,\ \varphi)|) \leqslant C. \quad (42)$$

Перейдем в выражении

$$S_1(\varepsilon,\ \xi,\ \varphi)\equiv\varepsilon^p\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(h(x)+V_\mu(\varepsilon,\ x))\right)=$$

$$=(p-1)\sum_{i=1}^{n}\left|\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}(h(x)+V_\mu(\varepsilon,\ x))\right|^{p-2}\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(h(x)+V_\mu(\varepsilon,\ x))$$

к координатам $(\xi,\ \varphi)$. При этом заметим, что в силу оценки (39)

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}(h(x)+V_\mu(\varepsilon,\ x))=c_{0i}(\varepsilon\xi,\ \varphi)\,t'_\xi(\xi,\ \varphi)+\varepsilon R(\varepsilon,\ \xi,\ \varphi),$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(h(x)+V_\mu(\varepsilon,\ x))=$$

$$=c_{0i}^2(\varepsilon\xi,\ \varphi)\,t''_{\xi\xi}(\xi,\ \varphi)+2\sum_{k=1}^{n-1}c_{0i}(\varepsilon\xi,\ \varphi)\,c_{0k}(\varepsilon\xi,\ \varphi)\,\varepsilon t''_{\xi\varphi_k}(\xi,\ \varphi)+$$

$$+\sum_{k,j=1}^{n-1}c_{ji}(\varepsilon\xi,\ \varphi)\,c_{ki}(\varepsilon\xi,\ \varphi)\,\varepsilon^2 t''_{\varphi_k\varphi_j}(\xi,\ \varphi)+\varepsilon R(\varepsilon,\ \xi,\ \varphi),$$

где $R(\varepsilon,\ \xi,\ \varphi)$ здесь и далее означает некоторую функцию, равномерно ограниченную по $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$, $\xi\in\mathbf{R}^+$, $\varphi\in\Phi$.

Воспользовавшись тем, что для $a,\ b\in\mathbf{R}^1$

$$|a+b|^{p-2}=\sum_{k=0}^{[p-2]}d_k(a)\,|a|^{p-2-k}b^k+\omega(a,\ b)\,|b|^{p-2},$$

где $d_k(a)$ ограничены равномерно по $a\in\mathbf{R}^1$, $\omega(a,\ b)$ ограничена на ограниченных в $\mathbf{R}^2$ множествах, и использовав оценки (40)—(42), получим

$$S_1(\varepsilon,\ \xi,\ \varphi)=\left(\sum_{i=1}^{n}|C_{0i}(\varepsilon\xi,\ \varphi)|^p\right)\frac{d}{d\xi}A_p\left(\frac{dt}{d\xi}\right)+\varepsilon R(\varepsilon,\ \xi,\ \varphi)=$$

$$=\delta(\varphi)\frac{d}{d\xi}A_p\left(\frac{dt}{d\xi}\right)+\varepsilon\xi\frac{d}{d\xi}A_p\left(\frac{dt}{d\xi}\right)\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\sum_{i=1}^{n}|c_{0i}(\rho,\ \varphi)|^p|_{\rho=\tau}\right]+$$

$$+\varepsilon R(\varepsilon,\ \xi,\ \varphi),$$

где $\tau\in[0,\ \eta]$.

Поскольку $F(x(\rho,\ \varphi),\ h(x(\rho,\ \varphi)))\equiv 0$, для некоторых $\tau\in[0,\ \eta]$ и $|\theta|\leqslant\sup\limits_{\varphi\in\Phi}|t_0(\varphi)|$ имеем

$$F(x(\rho,\ \varphi),\ h(x(\rho,\ \varphi))+t)=F(x(0,\ \varphi),\ h(x(0,\ \varphi))+t)+$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}F(x(\rho,\ \varphi),\ h(x(\rho,\ \varphi))+t)|_{\rho=\tau}\right]|_{t=0}\right\}\varepsilon\xi t=$$

$$=g(t,\ \varphi)+\varepsilon R(\varepsilon,\ \xi,\ \varphi)\,\xi t.$$

Таким образом, получим в Ω_1

$$\mathcal{M}_\varepsilon(h(x)+V_\mu(\varepsilon,\ x))=\left[-\delta(\varphi)\frac{d}{d\xi}A_p\left(\frac{dt}{d\xi}\right)+g(t,\ \varphi)\right]+$$

$$+\varepsilon R(\varepsilon,\ \xi,\ \varphi)\,\xi\left[-\frac{d}{d\xi}A_p\left(\frac{dt}{d\xi}\right)\right]+\varepsilon R(\varepsilon,\ \xi,\ \varphi)\,\xi t(\xi,\ \varphi)+\varepsilon R(\varepsilon,\ \xi,\ \varphi)=$$

$$=\mu t''_{\xi\xi}(\xi,\ \varphi)+\varepsilon R(\varepsilon,\ \xi,\ \varphi)\,\xi\delta^{-1}(\varphi)\,[\mu t''_{\xi\xi}(\xi,\ \varphi)-g(t,\ \varphi)]+$$

$$+\varepsilon R(\varepsilon,\ \xi,\ \varphi)\,t(\xi,\ \varphi)+\varepsilon R(\varepsilon,\ \xi,\ \varphi). \tag{43}$$

Оценки (13), (14) и (15) показывают, что

$$|\mu t''_{\xi\xi}(\varepsilon,\ \varphi)|\leqslant C\mu^{\frac{1}{2}}=C\varepsilon^{\frac{p-2}{2}},\quad |\mu t''_{\xi\xi}(\xi,\ \varphi)|\leqslant C|t(\xi,\ \varphi)|,\ |t(\xi,\ \varphi)|\leqslant Ce^{-d^2\xi}.$$

Так как $|g(t,\ \varphi)|\leqslant C|t(\xi,\ \varphi)|$ (в силу того, что $g(0,\ \varphi)=0$), то из оценки (43) следует, что

$$|\mathcal{M}_\varepsilon(h(x)+V_\mu(\varepsilon,\ x))|\leqslant C\varepsilon\quad\text{в}\quad\Omega_1. \tag{44}$$

Рассмотрим теперь область Ω_2. В ней

$$V_\mu(\varepsilon,\ x)=\tilde{t}(\xi(x),\ \varphi(x)),$$

где

$$\tilde{t}(\xi,\ \varphi)=\chi\left(\frac{1}{\varepsilon}t_0(\varphi)\right)t(\xi,\ \varphi).$$

Заметим, что при каждом дифференцировании функции $\tilde{t}(\xi,\ \varphi)$ по φ_k будет возникать множитель $1/\varepsilon$. На множестве Ω_2 имеем $|t(\xi,\ \varphi)|\leqslant\leqslant|t_0(\varphi)|\leqslant 2\varepsilon$. Учитывая это, а также пользуясь первой из оценок (14), путем непосредственной проверки убеждаемся, что оценки (39)—(42) сохраняются при замене $t(\xi,\ \varphi)$ на $\tilde{t}(\xi,\ \varphi)$.

Повторяя рассуждения, приведенные при выводе оценки (44), мы получим, что она сохраняется в Ω_2. Это завершает доказательство леммы 3.

Доказательство леммы 4. В области $G\setminus\Gamma_{2\eta}$ имеем $U(\varepsilon,x)\equiv\equiv V_\mu(\varepsilon,\ x)\equiv 0$.

Рассмотрим произвольную окрестность $\Gamma^k_{2\eta}=\bigcup\limits_{i=1}^{4}\Omega_i$, где Ω_i были определены при доказательстве леммы 3.

В области Ω_3 $U(\varepsilon,\ x)\equiv 0$, а для $V_\mu(\varepsilon,\ x)$ имеет место оценка (38). Поэтому

$$|U(\varepsilon,\ x)-V_\mu(\varepsilon,\ x)|\leqslant C\varepsilon^K$$

в Ω_3 для любого $K>0$. В $\Omega_2\cup\Omega_4$

$$|U(\varepsilon,\ x)|\leqslant|t_0(\varphi(x))|\leqslant 2\varepsilon\quad\text{и}\quad|V_\mu(\varepsilon,\ x)|\leqslant|t_0(\varphi(x))|\leqslant 2\varepsilon,$$

так что

$$|U(\varepsilon,\ x)-V_\mu(\varepsilon,\ x)|\leqslant C\varepsilon\quad\text{в}\quad\Omega_2\cup\Omega_4.$$

Для получения нужной оценки в Ω_1 вычтем из равенства (5) равенство (11), умножим на функцию $r(\xi,\ \varphi)-t(\xi,\ \varphi)$ и проинтегрируем по частям. При этом, учитывая, что $\operatorname{supp}_\xi r(\xi,\ \varphi)\subset[0,\ \beta_0]$, получаем

$$\delta(\varphi)\int_0^\infty \left[A_p\left(\frac{dr}{d\xi}\right)-A_p\left(\frac{dt}{d\xi}\right)\right]\left(\frac{dr}{d\xi}-\frac{dt}{d\xi}\right)d\xi+$$

$$+\int_0^\infty [g(r,\ \varphi)-g(t,\ \varphi)](r-t)\,d\xi=$$

$$=\mu\int_0^\infty \frac{dt}{d\xi}\left(\frac{dr}{d\xi}-\frac{dt}{d\xi}\right)d\xi\leqslant\mu\int_0^{\beta_0}\frac{dt}{d\xi}\left(\frac{dr}{d\xi}-\frac{dt}{d\xi}\right)d\xi. \qquad (45)$$

Для оценки левой части неравенства (45) снизу воспользуемся алгебраическим неравенством

$$(|a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b)(a-b)\geqslant 2^{-p}|a-b|^p+2^{-p}|b|^{\frac{p}{2}}|a-b|^{\frac{p}{2}},$$

справедливым при $p\geqslant 4$. Для оценки правой части неравенства (45) сверху воспользуемся неравенством Юнга $ab\leqslant C(\gamma)a^{\frac{q}{q-1}}+\gamma b^q$ с $q=\frac{p}{2}$ и $\gamma=2^{-p}$.

В результате получим, что

$$2^{-p}\int_0^\infty\left|\frac{dr}{d\xi}-\frac{dt}{d\xi}\right|^p d\xi+2^{-p}\int_0^\infty\left|\frac{dt}{d\xi}\right|^{\frac{p}{2}}\left|\frac{dr}{d\xi}-\frac{dt}{d\xi}\right|^{\frac{p}{2}}d\xi+\alpha^2\int_0^\infty(r-t)^2\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant C\mu^{\frac{p}{p-2}}+2^{-p}\int_0^{\beta_0}\left|\frac{dt}{d\xi}\right|^{\frac{p}{2}}\left|\frac{dr}{d\xi}-\frac{dt}{d\xi}\right|^{\frac{p}{2}}d\xi,$$

откуда, учитывая непрерывность вложения $W_p'(\mathbf{R})$ в $C(\mathbf{R}^+)$, находим, что

$$|U(\varepsilon,\ x)-V_\mu(\varepsilon,\ x)|\leqslant C\mu^{\frac{1}{p-2}}=C\varepsilon \text{ в } \Omega_1.$$

Последняя оценка завершает доказательство леммы 4, а вместе с ней и теоремы.

Автор глубоко благодарен Р. С. Гусаровой и М. И. Вишику за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. — «Успехи матем. наук», 1957, **12** : 5(77), с. 3—122.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Об асимптотике решения краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений. «Докл. АН СССР», 1958, **121**, № 5, с. 778—781.
3. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.
4. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.

Поступила в редакцию
27.4 1976 г.
Кафедра
дифференциальных уравнений

V. Yu. Lunin

ON UNIFORM APPROXIMATION BY THE LEADING TERM IN THE ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE SOLUTION OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A CLASS OF QUASI-LINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

It is shown that the leading term in the asymptotic expansion of the solution of the boundary value problem

$$-\varepsilon^p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + F(x, u) = 0,$$

$$u|_{\partial G} = 0 \qquad (x \in G \subset \mathbf{R}^n, \quad p > n, \quad p \geqslant 4)$$

constructed by the Vishik — Lyusternik method is a uniform approximation in $\bar{G}$ to the exact solution.