МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

В.Ю. ЛУНИН

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители
доктор физико-математических наук, профессор
М.И. Вишик

кандидат физико-математических наук, доцент
Р.С. Гусарова

Москва, 1976 г.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Теория дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старших производных, в течение ряда лет является объектом исследований многих авторов. Этот интерес стимулируется потребностями ряда разделов физики и механики, где встречаются подобного рода уравнения. Различными авторами изучен широкий круг задач, связанных с сингулярными возмущениями, и предложены различные методы решения таких задач.

Систематическое изучение теории дифференциальных уравнений с малым параметром и систем таких уравнений было проведено Л.С.Понтрягиным, А.Н.Тихоновым, А.Б.Васильевой, Л.А.Люстерником, М.И.Вишиком, Е.Ф.Мищенко, С.А.Ломовым, а также другими авторами.

В.Вазовым, Н.Левинсоном, О.А.Олейник были изучены краевые задачи для линейных эллиптических уравнений второго порядка, содержащих малый параметр при старших производных.

Для широкого класса линейных уравнений с частными производными М.И.Вишиком и Л.А.Люстерником в цикле работ была разработана методика построения асимптотики решения. Они ввели в асимптотическое разложение решения погранслойные поправки, компенсирующие потерю некоторых граничных условий при переходе к вырожденной задаче. Для линейных задач погранслойная поправка экспоненциально убывает во внутренних точках области, в которой рассматривается задача. Эта методика получила дальнейшее развитие в ряде работ, обзор которых проведен В.А.Треногиным в [I2] .

Используя метод сращивания асимптотических разложений А.М.Ильин, Ю.П.Горьков и Е.Ф.Леликова изучили асимптотику решения краевой задачи для линейных эллиптических уравнений второго порядка в окрестности особых характеристик предельного уравнения.

Большой круг задач для уравнений с частными производными, содержащих малый параметр, рассмотрен Ж.-Л.Лионсом в монографии [I3] .

Мы не делаем здесь попытки осветить сколь-нибудь подробно все исследования по этой тематике и отсылаем за более подробным обзором к работам [I2,I3,24,25,26,3I,32] .

В данной работе основное внимание уделено задаче :

$$\varepsilon^p \mathcal{T}_{2m}(u) + \mathcal{T}_{2m-2}(u) = 0 , \tag{0.1}$$

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_\Gamma = 0 , \quad s = 0,1,\dots,m-1 . \tag{0.2}$$

Здесь $\mathcal{T}_{2m}(u)$ и $\mathcal{T}_{2m-2}(u)$ - квазилинейные эллиптические операторы порядка $2m$ и $2m-2$ соответственно :

$$\mathcal{T}_{2m}(u) \equiv \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} \mathcal{D}^\alpha A_\alpha(x,\delta u)\mathcal{D}^m u) , \tag{0.3}$$

$$\mathcal{T}_{2m-2}(u) \equiv \sum_{|\alpha|\le m-1} (-1)^{|\alpha|} \mathcal{D}^\alpha B_\alpha(x,\delta u) , \tag{0.4}$$

точка $x=(x_1,\dots,x_n)$ принадлежит ограниченной области $G\subset R^n$ с достаточно гладкой границей $\Gamma=\partial G$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ - малый параметр; $\vec{n}$ - вектор внешней нормали к Γ ;

$\mathcal{D}^\nu u = \dfrac{\partial^{|\nu|} u}{\partial x_1^{\nu_1}\dots\partial x_n^{\nu_n}}$,где $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$; $|\nu|=\sum_{i=1}^n \nu_i$;

$\mathcal{D}^k u = \{\mathcal{D}^\nu u : |\nu|=k\}$ для целого k , $\delta u = \{\mathcal{D}^k u : 0\le k\le m-1\}$.

Частный случай задачи такого рода для монотонных эллиптических уравнений второго порядка был рассмотрен Ж.-Л.Лионсом в монографии [I3] .Однако поведение решения вблизи границы,где происходит явление пограничного слоя ,им не было изучено.

В главе I данной работы будет проведено построение погранслойной поправки.При этом нелинейный характер задачи (0.I)-(0.2) приводит к явлениям,не имевшим места в линейном случае.Так, например,если мы рассмотрим на отрезке $[0,1]$ краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения :

$$\begin{cases} -\varepsilon^4 \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{du}{dx}\right)^3 + u = 1, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 1, \end{cases}$$

то ее единственное в классе $W_4^1(0,1)$ решение $u_\varepsilon(x)$ имеет вид : $u_\varepsilon(x) = 1 + U(\varepsilon, x)$,где

$$U(\varepsilon,x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{24}}\left(\dfrac{x}{\varepsilon} - \sqrt[4]{24}\right)^2 & \text{при} \quad x < \sqrt[4]{24}\,\varepsilon, \\ 0 & \text{при} \quad x \geqslant \sqrt[4]{24}\,\varepsilon. \end{cases}$$

Здесь решение вырожденного уравнения $u_0(x) \equiv 1$,а $U(\varepsilon,x)$ – функция типа пограничного слоя,компенсирующая невязку в выполнении граничных условий.Отметим ,что вместо экспоненциального убывания функции пограничного слоя $U(\varepsilon,x)$,которое имело бы место в линейном случае,здесь пограничный слой тождественно равен нулю для достаточно малых $\varepsilon > 0$ в любой внутренней точке отрезка $[0,1]$.

Мы покажем ниже,что аналогичный эффект имеет место и для общей задачи (0.I)-(0.2) .

Чтобы облегчить чтение работы,дадим ниже ее краткое изложение.

Работа состоит из трех глав.

В первой главе проводится построение главного члена $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ асимптотики решения $u_\varepsilon(x)$ задачи 0.I – 0.2 и оценивается погрешность $z(\varepsilon,x) = u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x)$ в метрике соболевских пространств.

В § I этой главы сделаны вводные замечания.

Параграф 2 посвящен формулировке условий,которые далее на протяжении всей работы предполагаются выполненными.

Относительно функций,входящих в (0.3) и(0.4) предполагается,что A_α – один раз,а B_α – m раз непрерывно дифференци-

руемы по своим аргументам, причем

$$|A_\alpha(x,\xi,\eta)| \le C\,(1+|\xi|^{p-1}+|\eta|^{p-1}) \qquad \text{для } |\alpha|\le m,$$

$$|B_\alpha(x,\xi)| \le C\,(1+|\xi|^{q-1}) \qquad \text{для } |\alpha|\le m-1.$$

Здесь $p\ge 2$ и $2\le q\le p$ – фиксированные для данной задачи параметры, $\xi_\nu=\xi_{\nu_1},\dots,\xi_{\nu_n}$, $\xi^K=\{\xi_\nu : |\nu|=K\}$ для целого K, $\xi=\{\xi^K : 0\le K\le m-1\}$, $\eta=\xi^m$.

Предполагается, что для $|\alpha|=m$ функции $A_\alpha(x,\xi,\eta)$ при больших $|\eta|$ ведут себя как однородные функции порядка $p-1$ по η. Точнее, предполагается, что для $|\alpha|=m$

$$A_\alpha(x,\xi,\eta)=a_\alpha(x,\xi)\,P_\alpha(\eta)+\tilde{A}_\alpha(x,\xi,\eta), \tag{0.5}$$

где $a_\alpha(x,\xi)$ – функции класса C^m,

$$|\tilde{A}_\alpha(x,\xi,\eta)| \le C\,(1+|\xi|^{p-1}+|\eta|^{p-1-\sigma}) \tag{0.6}$$

с константой $\sigma>0$,

$$P_\alpha(t\eta)=\operatorname{sgn} t\cdot|t|^{p-1}P_\alpha(\eta) \qquad \text{для } t\in R^1.$$

Далее требуется, чтобы операторы $\mathcal{T}_{2m}(u)$ и $\mathcal{T}_{2m-2}(u)$ удовлетворяли условию сильной эллиптичности:

$$\sum_{|\alpha|\le m}\left[A_\alpha(x,\xi,\xi^m)-A_\alpha(x,\xi',\xi^{m\prime})\right](\xi_\alpha-\xi'_\alpha)\ge\gamma_0^2\sum_{|\alpha|=m}|\xi_\alpha-\xi'_\alpha|^p, \tag{0.7}$$

$$\sum_{|\alpha|\le m-1}\left[B_\alpha(x,\xi)-B_\alpha(x,\xi')\right](\xi_\alpha-\xi'_\alpha)\ge\gamma_1^2\sum_{|\alpha|=m-1}|\xi_\alpha-\xi'_\alpha|^q,$$

где $\gamma_0,\gamma_1>0$.

Эти условия обеспечивают существование и единственность решения задачи (0.I)-(0.2) в классе $\overset{\circ}{W}{}^m_p(G)$, а также существование и единственность решения вырожденной задачи

$$\mathcal{T}_{2m-2}(u)=0,\quad \left.\frac{\partial^s u}{\partial\vec{n}^s}\right|_\Gamma=0 \quad \text{для} \quad s=0,1,\dots,m-2 \tag{0.8}$$

в классе $\overset{\circ}{W}{}^{m-1}_q(G)$.

Предполагается, наконец, что оператор $\mathcal{T}_{2m-2}(u)$ удовлетворяет еще двум условиям.

Условие А. Существует константа $\gamma_2 > 0$ такая, что

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m-1} \frac{\partial B_\alpha(x,\xi)}{\partial \xi_\beta} \psi_\alpha \psi_\beta \geq \gamma_4^2 \sum_{|\alpha|=m-1} \psi_\alpha^2$$

для любого $\psi = \{ \psi_\nu : |\nu| = m-1 \}$.

Условие В. Вырожденная задача (0.8) имеет решение

$$u(x) \in C^m(\bar{G}) \cap W_2^{m+1}(G).$$

Примером задачи, удовлетворяющей всем поставленным условиям, служит задача:

$$\varepsilon^p \Delta\left(|\Delta u|^{p-2} \Delta u\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} \left[1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right]^{\frac{q-2}{2}} \right\} = f(x),$$

$$u\Big|_{\partial G} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial G} = 0,$$

где $p \geq 2$, $2 \leq q \leq p$, $f(x) \in C^3(\bar{G})$.

Заметим, что в случае $m=1$ имеем $\mathcal{T}_0(u) \equiv B_0(x,u)$ и условия А и В будут удовлетворены, если

$$\frac{\partial}{\partial u} B_0(x,u) \geq \gamma_4^2 > 0, \quad B_0(x,u) \in C^2(\bar{G} \times R^1).$$

В случае $m=2$ задача (0.8) подробно изучена в [I4], где получены требования, обеспечивающие выполнение условия В.

В случае $m>2$ гладкость решений задачи (0.8) изучалась в работах [I5-I7].

Заметим, что условие сильной эллиптичности (0.7) налагает существенные ограничения на вид функций $A_\alpha(x,\xi,\eta)$.

Именно, при выполнении сформулированных выше условий, в равенстве (0.5) функции $a_\alpha(x,\xi) \equiv a_\alpha(x)$ - не зависят от ξ и

$$|a_\alpha(x)| \leq C,$$

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) P_\alpha(\eta)\eta_\alpha \geq \gamma_0^2 \sum_{|\alpha|=m} |\eta_\alpha|^p .$$

Параграф 3 первой главы начинается с рассмотрения случая, когда решение $u_0(x) \equiv h(x)$ вырожденной задачи (0.8) удовлетворяет всем граничным условиям (0.2), то есть $h(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(G)$. Доказывается, что справедлива теорема

<u>Теорема I.I.</u> Пусть $u_\varepsilon(x)$ - решение задачи (0.I)-(0.2), а $h(x)$ - решение задачи (0.8), причем

$$h(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(G) \cap W_2^{m+1}(G).$$

Тогда

$$\|u_\varepsilon - h\|_{W_p^m(G)} \leq C\varepsilon, \qquad \|u_\varepsilon - h\|_{W_q^{m-1}(G)} \leq C\varepsilon^{2p/q},$$

где константы C не зависят от ε.

В общем случае, когда решение вырожденной задачи $h(x) \notin \overset{\circ}{W}{}_p^m(G)$, предполагается, что аналогично линейному случаю (см. [7]), главный член асимптотики решения задачи (0.I)-(0.2) имеет вид:

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = h(x) + \varepsilon^{m-1} u(\varepsilon,x) + \varepsilon\psi(\varepsilon,x). \tag{0.9}$$

Здесь $h(x)$ - решение вырожденной задачи (0.8); $u(\varepsilon,x)$ - функция типа погранслоя, такая, что

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial \vec{n}^{\,m-1}}\left(h(x) + \varepsilon^{m-1} u(\varepsilon,x)\right)\Big|_\Gamma = 0;$$

$\psi(\varepsilon,x)$ - гладкая функция, такая, что

$$\frac{\partial^{m-1}\psi}{\partial\vec{n}^{m-1}}\Big|_{\Gamma}=0,\quad \frac{\partial^{s}}{\partial\vec{n}^{s}}\tilde{u}_{\varepsilon}\Big|_{\Gamma}=0 \qquad \text{для } s=0,\dots,m-2. \qquad (0.10)$$

Для построения погранслойной поправки в окрестности границы вводятся локальные координаты (ρ,φ) так, что $\rho(x)$ - расстояние от точки $x\in G$ до границы вдоль нормали к границе, проходящей через эту точку, а $\varphi(x)$ - "угловая" координата точки пересечения этой нормали с границей. Затем делается регуляризующее растяжение $\rho=\varepsilon t$ и предполагается, что погранслой $U(\varepsilon,x)$ в локальных координатах имеет вид:

$$U(\varepsilon,x)=v\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi\right).$$

Требуя, чтобы функция $v(t,\varphi)$ обращала в нуль старшие при $\varepsilon\to 0^{+}$ члены в разложении по степеням ε выражения $\varepsilon^{p}\mathcal{T}_{2m}(\tilde{u}_{\varepsilon})+\mathcal{T}_{2m-2}(\tilde{u}_{\varepsilon})$, мы получаем уравнение для определения функции $v(t,\varphi)$:

$$-\delta(\varphi)\frac{\partial^{m}}{\partial t^{m}}\Lambda_{p}\left(\frac{\partial^{m}v}{\partial t^{m}}\right)+\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}g\left(\frac{\partial^{m-1}v}{\partial t^{m-1}},\varphi\right)=0. \qquad (0.11)$$

При этом должны выполняться условия

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}v(t,\varphi)\Big|_{t=0}=z_{0}(\varphi)\equiv\frac{\partial^{m-1}}{\partial\vec{n}^{m-1}}h\Big|_{\Gamma},\quad \lim_{t\to+\infty}v(t,\varphi)=0. \qquad (0.12)$$

Здесь $\delta(\varphi)>0$ и $g(z,\varphi)$ - функции, выражающиеся через функции A_{α} и B_{α} и элементы матрицы Якоби, соответствующей замене координат $(x_1,\dots,x_n)$ на $(\rho,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$, причем $g'_{z}(z,\varphi)\geq\sigma_{6}^{2}>0$; $\Lambda_{p}(z)=z\cdot|z|^{p-2}$.

В § 4 первой главы исследуется вопрос о разрешимости задачи (0.II)-(0.I2) в случае $p>2$. Докааана следующая теорема.

<u>Теорема I.2.</u> Пусть $\delta(\varphi),\ z_0(\varphi) \in C^m(\Phi)$;

$g(z,\varphi) \in C^m(R^1 \times \Phi)$ причем

$\delta(\varphi) \geq \gamma^2 > 0,\quad g'_z(z,\varphi) \geq \gamma^2 > 0.$

Тогда при любом фиксированном φ задача (0.II)-(0.I2) имеет единственное решение $v(t,\varphi)$ в классе $W_p^m(R^+)$ такое, что $\operatorname{supp}_t v(t,\varphi) = [0, B(\varphi)]$, где $B(\varphi) \leq B_0 < +\infty$.

Как функция n переменных $(t, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$, функция $v(t,\varphi)$ такова, что $v(t,\varphi) \in C^{\varkappa}(R^+ \times \Phi) \cap C^m(R^+ \times \Phi \setminus \mathcal{M})$ при $\varkappa < m - (m-1)\frac{2}{p}$, где $\mathcal{M} = \{(t,\varphi) \in R^+ \times \Phi : t = B(\varphi)\}$. При этом в области $\{(t,\varphi) \in R^+ \times \Phi : t < B(\varphi)\}$ справедливы оценки:

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} D_\varphi^\alpha v(t,\varphi) \right| \leq C \left| z_0(\varphi) \right|^\nu,$$

где $\nu = \frac{2}{p} + \frac{p-2}{p}(m-k) - |\alpha|$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, $k + |\alpha| \leq m$.

Кроме того, функция $\Lambda_p\left(\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\right) \in C^1(R^+ \times \Phi)$, и имеет место равенство:

$$-\delta(\varphi)\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_p\left(\frac{\partial^m v(t,\varphi)}{\partial t^m}\right) + g\left(\frac{\partial^{m-1} v(t,\varphi)}{\partial t^{m-1}}, \varphi\right) - g(0,\varphi) = 0.$$

Подчеркнем, что в отличие от линейного случая, где погранслойная поправка убывает экспоненциально, здесь она имеет компактный носитель. Другим отличием от линейного случая является то обстоятельство, что функция $v(t,\varphi)$ при $p \geq 4$ имеет не более, чем m непрерывных производных, то есть задача (0.II)-

-(0.I2) не имеет классических решений. Это связано с тем, что уравнение (0.II) вырождается в точках, где $\frac{\partial^m v}{\partial t^m}=0$, и повышение гладкости данных задачи (0.II)-(0.I2) не влечет за собой повышения гладкости функции $v(t,\varphi)$. Это напоминает ситуацию, которая возникает при вырождении линейно-эллиптического уравнения второго порядка в линейное уравнение первого порядка, когда характеристики вырожденного уравнения имеют особые точки или точки касания с границей. Поведение решения в подобных случаях рассматривалось в работах [I8-2I].

В § 5 первой главы строится главный член асимптотики решения задачи (0.I)-(0.2) по формуле (0.9).

Погранслойная поправка $u(\varepsilon,x)$ в локальных координатах берется в виде:

$$u(\varepsilon,x)=\begin{cases} \chi\left(\frac{1}{\varepsilon}\tau_0(\varphi)\right) v\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi\right)+\left[1-\chi\left(\frac{1}{\varepsilon}\tau_0(\varphi)\right)\right]\eta\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho\right)\tau_0(\varphi) & \\ & \text{для } \rho(x)\leqslant 2s, \\ 0 \quad \text{для } \rho(x)\geqslant 2s, & \end{cases} \tag{0.13}$$

где $\chi(\tau)$ и $\eta(\tau)$ - гладкие функции, такие, что $0\leqslant\chi(\tau)\leqslant 1$, $\chi(\tau)\equiv 0$ для $|\tau|\leqslant 1$, $\chi(\tau)\equiv 1$ для $|\tau|\geqslant 2$; $\eta(\tau)\equiv 0$ для $\tau\geqslant 2s$, $\eta(\tau)\equiv 1$ для $\tau\leqslant s$ (здесь $3s$ - ширина полоски, примыкающей к границе Γ, в которой определены координаты (ρ,φ).

Срезающие функции $\chi(\tau)$ и $\eta(\tau)$ вводятся для того, чтобы обеспечить принадлежность функции $u(\varepsilon,x)$ классу $W_p^m(G)$. Если функция $\gamma_0(\varphi)$ не обращается в нуль, то из теоремы I.2 следует, что $v(t,\varphi) \in C^m(R^+ \times \Phi)$, и тогда $u(\varepsilon,x)$ совпадает с $v(\frac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi)$ в окрестности, где определены координаты (ρ,φ).

Функция $\Psi(\varepsilon,x)$ в координатах (ρ,φ) строится как полином $\varepsilon^{m-2}\sum_{K=0}^{m-2} a_K(\varphi)\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^K$, где коэффициенты $a_K(\varphi)$ подобраны так, чтобы выполнялись условия (0.I0).

Доказана следующая теорема.

<u>Теорема I.3.</u> Пусть $u_\varepsilon(x)$ - решение задачи (0.I)-(0.2), а функция $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ определена указанным выше образом.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\| u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{W_p^m(G)} \leq C\varepsilon^{\frac{\varkappa}{p}+\frac{1-p}{p}}, \\ &\| u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{W_q^{m-1}(G)} \leq C\varepsilon^{\frac{\varkappa}{q}+\frac{1}{q}}, \end{aligned}\right\} \qquad (0.14)$$

где $\varkappa = \min\left(1, \frac{\sigma p}{p-1}\right)$, σ - константа из оценки (0.6).

Поскольку $\|\varepsilon^{m-1}u(\varepsilon,x)\|_{W_p^m(G)} = O\left(\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}\right)$ и $\|\varepsilon^{m-1}u(\varepsilon,x)\|_{W_q^{m-1}(G)} = O(\varepsilon^{1/q})$, то оценки (0.I4) показывают, что $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ - является главным членом асимптотики решения задачи (0.I)-(0.2) при $\varepsilon \to 0^+$.

С помощью интерполяции из оценок (0,14) могут быть получены оценки погрешности $u_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)$ в нормах других пространств (см., например, [22]). Мы ограничимся одним результатом такого рода, следующим из теорем вложения (см. [23]).

Именно, если в условиях теоремы 1.2 имеем: $\frac{1}{q}-\frac{1}{p}<\frac{m-1}{n}$ и целое число K таково, что $Kp+n<\min(mp,(\varkappa+1)m)$, то

$$\|u_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C^K(\bar{G})}\leqslant C\varepsilon^\nu,$$

где $\nu=\frac{(\varkappa+1)m-(Kp+n)}{mp}>0.$

Во второй главе показывается, что в случае вырождения уравнения (0.1) второго порядка в алгебраическое уравнение, погрешность при замене решения задачи (0.1)-(0.2) главным членом его асимптотики равномерно в замкнутой области $\bar{G}$ мала. Отметим, что при $n\geqslant 2$ этот факт не вытекает из оценок (0.14).

Изложение ведется на примере краевой задачи:

$$\mathcal{M}_\varepsilon(u)\equiv-\varepsilon^p\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Lambda_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\mathcal{F}(x,u)=0, \tag{0.15}$$

$$u|_\Gamma=0, \tag{0.16}$$

где $\Lambda_p(\tau)=\tau\cdot|\tau|^{p-2}$, $p>n$, $p>2$, $\mathcal{F}'_u(x,u)\geqslant\alpha^2>0$.

В соответствии с изложенным выше, главный член асимптотики решения задачи (0.15)-(0.16) имеет вид:

$$\tilde{u}_\varepsilon(x)=h(x)+U(\varepsilon,x),$$

где $U(\varepsilon,x)$ - функция, определенная равенством (0.13), а

$h(x) \equiv u_0(x)$ - решение вырожденного уравнения:

$$\mathcal{F}(x, u_0) = 0.$$

В § I второй главы доказывается принцип максимума для уравнения (0.I5) в следующей форме.

Лемма 2.I. Пусть $u_\varepsilon(x)$ - решение задачи (0.I5)-(0.I6), а $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ - некоторое семейство функций из $C^2(\bar{G})$. Тогда

$$\max_{x \in \bar{G}} |u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x)| \leq \max\left(\frac{1}{\alpha^2} \max_{x \in \bar{G}} |\mathcal{M}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)|, \max_{x \in \partial G} |\tilde{u}_\varepsilon|\right).$$

В случае $P < 4$ применение леммы 2.I к функции $\tilde{u}_\varepsilon(x)$, определенной согласно (0.I3) и (0.I7), дает сразу оценку погрешности в метрике $C(\bar{G})$, а именно доказана

Теорема 2.I. Пусть $u_\varepsilon(x)$ - решение задачи (0.I5)-(0.I6), а функция $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ определена равенствами (0.I3) и (0.I7). Тогда

$$|u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon \qquad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],\ x \in G.$$

В § 2 второй главы показывается, что теорема 2.I сохраняет силу при любом $P > n$.

Это делается следующим образом.

Поскольку в случае $P \geq 4$ функция $u_\varepsilon(\varepsilon, x)$ не имеет требуемой в лемме 2.I гладкости, то принцип максимума применяется ко вспомогательной функции $V_\mu(\varepsilon, x)$, определенной равенством:

$$V_\mu(\varepsilon, x) = \begin{cases} \chi\left(\frac{\tau_0(\varphi)}{\varepsilon}\right) w\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho, \varphi; \mu\right) \eta(\rho) & \text{при } \rho(x) \leq 2s, \\ 0 & \text{для } \rho(x) \geq 2s. \end{cases} \qquad (0.18)$$

Здесь $w(t,\varphi;\mu)$ – решение краевой задачи для регуляризованного уравнения погранслоя:

$$-\delta(\varphi)\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_p\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+g(w,\varphi)=0, \tag{0.19}$$

$$w(0,\varphi;\mu)=\tau_0(\varphi)\equiv -h\Big|_{\Gamma}, \quad \lim_{t\to+\infty} w(t,\varphi;\mu)=0, \tag{0.20}$$

где $\mu=\varepsilon^{p-2}$.

Существование, единственность и оценки решения задачи (0.I9)-(0.20) даются следующей теоремой.

<u>Теорема 2.2.</u> При любых фиксированных $\varphi\in\Phi$ и $\mu>0$ задача (0.I9)-(0.20) имеет единственное в классе $W_p^1(R^+)$ решение.

Как функция n переменных $(t,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$ функция $w(t,\varphi;\mu)$ такова, что $w(t,\varphi;\mu)\in C^2(R^+\times\Phi)$, и справедливы оценки:

$$\left.\begin{aligned}
&|w(t,\varphi;\mu)|\le|\tau_0(\varphi)|\,e^{-d^2t}, \quad d>0;\\
&|w'_t(t,\varphi;\mu)|\le C\,|w(t,\varphi;\mu)|^{2/p},\\
&|w'_t(t,\varphi;\mu)|\le C\mu^{-\frac{1}{2}}|w(t,\varphi;\mu)|,\\
&|w'_{\varphi_k}(t,\varphi;\mu)|\le C;\\
&\left|\frac{\partial^{|\alpha|}w(t,\varphi;\mu)}{\partial t^{\alpha_0}\partial\varphi_k^{\alpha_1}\partial\varphi_j^{\alpha_2}}\right|\le C\mu^{-\frac{|\alpha|-1}{2}}\left(\frac{1}{|\tau_0(\varphi)|}+t\right)^{\alpha_1+\alpha_2}|w'_t(t,\varphi;\mu)|\\
&\qquad\qquad\text{при } |\alpha|=1,2;\\
&|w'_t(t,\varphi;\mu)|^s\cdot\left|\frac{\partial^{|\alpha|}w(t,\varphi;\mu)}{\partial t^{\alpha_0}\partial\varphi_k^{\alpha_1}\partial\varphi_j^{\alpha_2}}\right|\le C\\
&\qquad\qquad\text{при } |\alpha|=2,\ s\ge\frac{p}{2}-2.
\end{aligned}\right\} \tag{0.21}$$

Наличие оценок (0.2I) позволяет доказать две леммы.

Лемма 2.2. Пусть функция $V_\mu(\varepsilon,x)$ определена формулой (0.I8). Тогда

$$\left|\mathcal{M}_\varepsilon\left(h(x)+V_\mu(\varepsilon,x)\right)\right| \leqslant C\varepsilon$$

при $x \in G$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $\mu = \varepsilon^{p-2}$.

Лемма 2.3. Пусть функции $u_\varepsilon(x)$ и $V_\mu(\varepsilon,x)$ определены равенствами (0.I3) и (0.I8) соответственно. Тогда

$$\left|u(\varepsilon,x) - V_\mu(\varepsilon,x)\right| \leqslant C\varepsilon$$

при $x \in G$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $\mu = \varepsilon^{p-2}$.

Теорема 2.I теперь следует из оценок (0.2I) и доказанных лемм.

Третья глава работы посвящена построению с любой степенью точности асимптотики задачи (0.I)-(0.2) в случае наличия в уравнении (0.I) специального вида дополнительных членов с малым параметром.

Изложение ведется на примере краевой задачи:

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\varepsilon(u) \equiv -\varepsilon^p \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} \Lambda_p\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \varepsilon^2 \Delta u + \mathcal{F}(x,u) = 0, & (0.22) \\ u\big|_\Gamma = 0, & (0.23) \end{cases}$$

где $\Lambda_p(\tau) = \tau \cdot |\tau|^{p-2}$, $p \geqslant 2$, $\mathcal{F}_1(x,u) \equiv \mathcal{F}'_u(x,u) \geqslant \alpha^2 > 0$.

Отметим, что при $0 < \sigma < 2$ задача

$$-\varepsilon^{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Lambda_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-\varepsilon^{\sigma}\Delta u+\mathcal{F}(x,u)=0,\qquad u\big|_{\Gamma}=0$$

рассматривается аналогично задаче (0.22)-(0.23), а при $\sigma>2$ аналогично задаче (0.I5)-(0.I6).

В § I третьей главы строится асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (0.22)-(0.23) в виде:

$$\tilde{u}_\varepsilon(x)=\sum_{i=0}^{K_1}\varepsilon^{\sigma_i}w_i(x)+\sum_{m=0}^{K_2}\varepsilon^{\sigma_m}v_m(\varepsilon,x).$$

Здесь $0=\sigma_0<\sigma_1<\ldots<\sigma_m<\ldots$ – упорядоченное множество всех неотрицательных чисел, представимых в виде $\sigma_i=p\ell+m$ с целыми ℓ и m; K_i – некоторое положительное целое число.

Для этого сначала выбираются число K и функции $w_i(x)\in C^2(\bar{G})$ такие, что для $\bar{w}=\sum_{i=0}^{K}\varepsilon^{\sigma_i}w_i(x)$ имеем:

$$\mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w})=\varepsilon^{\nu}h_1(\varepsilon,x),\quad |h_1(\varepsilon,x)|\leq C. \tag{0.25}$$

При этом $w_i(x)$ определяются рекуррентными соотношениями:

$$\mathcal{F}(x,w_0)=0,$$

$$\mathcal{F}_1(x,w_0)w_i=-\tilde{S}_i(w_0,\ldots,w_{i-1}),\quad i=1,\ldots,K,$$

где $\tilde{S}_i(w_0,\ldots,w_{i-1})$ – известные функции.

Для компенсации невязки в выполнении граничных условий (0.23) строятся затем функции типа погранслоя $v_i(\varepsilon,x)$ такие, что для $\bar{v}=\sum_{i=0}^{K}\varepsilon^{\sigma_i}v_i(\varepsilon,x)$ имеем:

$$\mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w}+\bar{v}) - \mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w}) = \varepsilon^{\nu} h_2(\varepsilon,x), \quad |h_2(\varepsilon,x)| \leq C \tag{0.26}$$

и

$$(\bar{w}(x) + \bar{v}(\varepsilon,x))\Big|_\Gamma = 0. \tag{0.27}$$

Предполагая, что функция $v_i(\varepsilon,x)$ имеет в локальных координатах вид:

$$v_i(\varepsilon,x) = \begin{cases} z_i\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi\right)\eta(\rho) & \text{при } \rho(x) \leq 2S, \\ 0 & \text{при } \rho(x) \geq 2S, \end{cases} \tag{0.28}$$

мы получаем из условий (0.26), (0.28), что функции $z_i(t,\varphi)$ должны являться решениями следующих задач:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_p\left(\frac{\partial z_0}{\partial t}\right) - a^2(\varphi)\frac{\partial^2 z_0}{\partial t^2} + g(z_0,\varphi) = 0, & (0.29) \\ z_0(0,\varphi) \equiv -w_0(x)\Big|_\Gamma, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} z_0(t,\varphi) = 0; & (0.30) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(1+(p-1)\left|\frac{\partial z_0}{\partial t}\right|^{p-2}\right)\frac{\partial z_i}{\partial t}\right] + b(t,\varphi)z_i = f_i(t,\varphi), & (0.31) \\ z_i(0,\varphi) \equiv -w_i(x)\Big|_\Gamma, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} z_i(t,\varphi) = 0 & (0.32) \end{cases}$$

для $i = 1,\dots,K$. Здесь $a(\varphi) > 0$; $\lim\limits_{t\to+\infty} b(t,\varphi) > 0$; $g(0,\varphi) = 0$, $g'_z(z,\varphi) \geq \delta^2 > 0$; $f_i(t,\varphi)$ – функция, определяемая по функциям $z_0(t,\varphi),\dots,z_{i-1}(t,\varphi)$ и экспоненциально убывающая при $t\to+\infty$, если экспоненциально убывают функции $z_0(t,\varphi),\dots,z_{i-1}(t,\varphi)$.

Отметим, что здесь, в отличие от линейного случая, уравнение для погранслоя $\eta_0(t,\varphi)$ при $p>2$ нелинейно, а остальные погранслои определяются из линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Если функции $w_i(x)$ и $v_i(\varepsilon,x)$ выбраны так, что имеют место соотношения (0.25), (0.26) и (0.27), то справедлива теорема

Теорема 3.1. Пусть функции $\Lambda_p(\tau)$, $F(x,u)$ и граница области G достаточно гладкие. Если $u_\varepsilon(x)$ - решение задачи (0.22)-(0.23), а функция $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ определена согласно равенствам (0.24) и (0.28), то

$$\| u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x) \|_{W_p^1(G)} \leq C\varepsilon^{\omega} \quad \text{с} \quad \omega = \frac{2\nu}{p} - 1 .$$

В § 2 третьей главы доказана однозначная разрешимость задач (0.29)-(0.30) и (0.31)-(0.32), что завершает построение асимптотики решения задачи (0.22)-(0.23).

Таково краткое содержание работы.

Глава I

ПОСТРОЕНИЕ ГЛАВНОГО ЧЛЕНА АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

§ I. Вводные замечания

Хорошо известно, что для целого ряда физических явлений характерно наличие пограничного слоя, то есть некоторая физическая величина, описывающая такое явление, претерпевает разкие изменения в сравнительно небольшой области пространства. Обзор такого рода явлений проведен, например, в статье [24].

Математически это связано с тем, что дифференциальные уравнения, описывающие это явление, содержат в качестве множителя при старших производных параметр, величина которого мала по сравнению с некоторыми характерными для задачи величинами. Пренебрежение такими членами приводит к уравнениям более низкого порядка, решения которых не в состоянии удовлетворять всем условиям исходной задачи. Ряд таких задач рассмотрен в монографиях [25, 26].

В данной работе мы ограничимся рассмотрением явлений такого типа, описывающихся эллиптическими уравнениями порядка $2m$, которые вырождаются при пренебрежении членами, содержащими малый параметр, в эллиптические уравнения порядка $2m-2$.

§ 2. Основные предположения

I. В ограниченной области $G \subset R^n$ с границей $\Gamma = \partial G$ класса C^{m+2} рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon^p \mathcal{T}_{2m}(u) + \mathcal{T}_{2m-2}(u) = 0, \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial \vec{n}^s}\right|_\Gamma = 0, \qquad s = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{1.2}$$

Здесь $x=(x_1,\dots,x_n)\in G$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ – малый параметр, $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к Γ.

Пусть

$$\mathcal{T}_{2m}(u)\equiv\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\mathcal{D}^{\alpha}A_{\alpha}(x,\delta u,\mathcal{D}^{m}u),$$

$$\mathcal{T}_{2m-2}(u)\equiv\sum_{|\alpha|\le m-1}(-1)^{|\alpha|}\mathcal{D}^{\alpha}B_{\alpha}(x,\delta u),$$

где

$$\mathcal{D}^{\nu}u=\frac{\partial^{|\nu|}u}{\partial x_1^{\nu_1}\dots\partial x_n^{\nu_n}},\quad \nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$$ – мультииндекс,

$$|\nu|=\sum_{i=1}^{n}\nu_i\ ;$$

$$\mathcal{D}^{K}u=\{\mathcal{D}^{\nu}u:|\nu|=K\},$$ K – целое;

$$\delta u=\{\mathcal{D}^{K}u:\ 0\le K\le m-1\}.$$

Будем обозначать

$\xi_{\nu}=\xi_{\nu_1,\dots,\nu_n}$ для произвольного мультииндекса ν;

$\xi^{K}=\{\xi_{\nu}:|\nu|=K\}$;

$\xi=\{\xi^{K}:\ 0\le K\le m-1\}$;

$\eta=\xi^{m}$, $\eta_{\alpha}=\xi_{\alpha}$ для $|\alpha|=m$.

Пусть далее $p\ge 2$ и $2\le q\le p$ – некоторые фиксированные для данной задачи параметры.

Предположим, что функции $A_{\alpha}(x,\xi,\eta)$ один раз, а функции $B_{\alpha}(x,\xi)$ – m раз непрерывно дифференцируемы по своим аргументам и удовлетворяют условиям

$$|A_{\alpha}(x,\xi,\eta)|\le C(1+|\xi|^{p-1}+|\eta|^{p-1}),\quad |\alpha|\le m; \tag{1.3}$$

$$|B_{\alpha}(x,\xi)|\le C(1+|\xi|^{q-1}),\quad |\alpha|\le m-1. \tag{1.4}$$

Мы будем предполагать, что при $|\alpha|=m$ функции $A_{\alpha}(x,\xi,\eta)$, асимптотически при $|\eta|\to\infty$, ведут себя как

однородные функции порядка $p-1$ по η. Точнее, будем предполагать, что при $|\alpha| = m$:

$$A_\alpha(x,\xi,\eta) = a_\alpha(x,\xi)\, P_\alpha(\eta) + \tilde{A}_\alpha(x,\xi,\eta), \tag{1.5}$$

где $a_\alpha(x,\xi)$ функции класса C^m,

$$|\tilde{A}_\alpha(x,\xi,\eta)| \leq C\left(1 + |\xi|^{p-1} + |\eta|^{p-1-\sigma}\right)$$ с константой $\sigma > 0$; (1.6)

$$P_\alpha(t\eta) = \operatorname{sgn} t \cdot |t|^{p-1} P_\alpha(\eta) \quad \text{для } t \in R^1. \tag{1.7}$$

Определим операторы T^ε_{2m} из $\overset{\circ}{W}{}^m_p(G)$ в $W^{-m}_{p/p-1}(G)$ и T_{2m-2} из $\overset{\circ}{W}{}^{m-1}_q(G)$ в $W^{-(m-1)}_{q/q-1}(G)$ равенствами:

$$\langle T^\varepsilon_{2m}(u), v\rangle = \varepsilon^p \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G A_\alpha(x,\delta u, \mathcal{D}^m u)\, \mathcal{D}^\alpha v\, dx +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leq m-1} \int_G B_\alpha(x,\delta u)\, \mathcal{D}^\alpha v\, dx \quad \text{для } u, v \in \overset{\circ}{W}{}^m_p(G);$$

$$\langle T_{2m-2}(u), v\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m-1} \int_G B_\alpha(x,\delta u)\, \mathcal{D}^\alpha v\, dx \quad \text{для } u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{m-1}_q(G).$$

Здесь $W^K_r(G)$ – пространство Соболева функций, имеющих в G обобщенные производные до порядка K включительно, и таких, что $\|u\|^r_{W^K_r(G)} = \sum_{|\alpha|\leq K} \int_G |\mathcal{D}^\alpha u|^r dx < \infty$; $\overset{\circ}{W}{}^K_r(G)$ – замыкание в метрике $W^K_r(G)$ множества бесконечно дифференцируемых финитных в G функций; $\langle f, u\rangle$ – значение функционала f из пространства $W^{-K}_{r/r-1}(G)$, сопряженного к $\overset{\circ}{W}{}^K_r(G)$ на элементе $u \in \overset{\circ}{W}{}^K_r(G)$. Заметим при этом, что $\exists C$, не зависящее от u, что

$$\|u\|_{W^K_r(G)} \leq C\Big(\sum_{|\alpha|=K} \int_G |\mathcal{D}^\alpha u|^r dx\Big)^{1/r} \quad \text{для } u \in \overset{\circ}{W}{}^K_r(G). \tag{1.8}$$

Будем предполагать, что выражения $\mathcal{T}_{2m}(u)$ и $\mathcal{T}_{2m-2}(u)$ порождают сильно эллиптические операторы, то есть, что

$$\sum_{|\alpha|\le m}\left[A_\alpha(x,\xi,\xi^m)-A_\alpha(x,\xi',\xi^{m\prime})\right](\xi_\alpha-\xi'_\alpha)\ge\gamma_0^2\sum_{|\alpha|=m}|\xi_\alpha-\xi'_\alpha|^p, \qquad (1.9)$$

$$\sum_{|\alpha|\le m-1}\left[B_\alpha(x,\xi)-B_\alpha(x,\xi')\right](\xi_\alpha-\xi'_\alpha)\ge\gamma_1^2\sum_{|\alpha|=m-1}|\xi_\alpha-\xi'_\alpha|^q, \qquad (1.10)$$

где $\gamma_0>0$ и $\gamma_1>0$.

Из условий (I.9),(I.I0) и неравенства (I.8) немедленно вытекает монотонность операторов T^ε_{2m} и T_{2m-2}:

$$\langle T^\varepsilon_{2m}(u)-T^\varepsilon_{2m}(v),u-v\rangle\ge\varepsilon^p\gamma_2^2\|u-v\|^p_{W^m_p(G)}+\gamma_3^2\|u-v\|^q_{W^{m-1}_q(G)}, \qquad (1.11)$$

$$\langle T_{2m-2}(u)-T_{2m-2}(v),u-v\rangle\ge\gamma_3^2\|u-v\|^q_{W^{m-1}_q(G)}, \text{ где } \gamma_2,\gamma_3>0.$$

Известно (см. [I-6]), что условия (I.3),(I.4),(I.9) и (I.I0) обеспечивают существование и единственность в классе $\overset{\circ}{W}{}^m_p(G)$ решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (I.I)-(I.2), а также существование и единственность в классе $\overset{\circ}{W}{}^{m-1}_q(G)$ решения $u_0(x)\equiv h(x)$ задачи:

$$\mathcal{T}_{2m-2}(u)=0, \quad \frac{\partial^s u}{\partial\vec{n}^s}\Big|_\Gamma=0 \quad \text{при } s=0,\dots,m-2. \qquad (1.12)$$

(Решение понимается в обобщенном смысле, то есть в смысле выполнения равенств $\langle T^\varepsilon_{2m}(u_\varepsilon),v\rangle=0$ и $\langle T_{2m-2}(u_0),\omega\rangle=0$ для любых $v\in\overset{\circ}{W}{}^m_p(G)$ и $\omega\in\overset{\circ}{W}{}^{m-1}_q(G)$ соответственно).

Мы потребуем выполнения еще двух дополнительных условий.

Условие А. Существует константа $\gamma_4>0$ такая, что

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m-1}\frac{\partial B_\alpha(x,\xi)}{\partial\xi_\beta}\psi_\alpha\psi_\beta\ge\gamma_4^2\sum_{|\alpha|=m-1}\psi_\alpha^2 \qquad (1.13)$$

для любого $\psi=\{\psi_\nu:|\nu|=m-1\}$.

Условие В. Задача (I.I2) имеет решение

$$u(x)\in C^m(\bar G)\cap W^{m+1}_2(G).$$

Замечание.I.I. В случае $m=1$ имеем $\mathcal{T}_{2m-2}(u)\equiv B_0(x,u)$, и условия А и В будут выполнены, если $\frac{\partial}{\partial u}B_0(x,u)\ge\gamma_4^2>0$, $B_0(x,u)\in C^2(\bar G\times R^1)$.

В случае $m=2$ задача (I.I2) подробно изучена в [I4], где указаны требования, обеспечивающие выполнение условия В.

В случае $m>2$ вопросы гладкости решений задачи (I.I2) изучались в работах [I5-I7].

Замечание I.2. Из оценки (I.I3) следует, в частности, что неравенство (I.II) имеет место с $q=2$. (Доказательство этого факта приведено в статье [4]). Поэтому имеет место оценка:

$$\langle T^{\varepsilon}_{2m}(u)-T^{\varepsilon}_{2m}(v),\, u-v\rangle \geqslant \geqslant \varepsilon^{p}\gamma_2^{2}\|u-v\|^{p}_{W^{m}_{p}(G)}+\frac{\gamma_3^{2}}{2}\|u-v\|^{q}_{W^{m-1}_{q}(G)}+\frac{\gamma_3^{2}}{2}\|u-v\|^{2}_{W^{m-1}_{2}(G)}. \tag{1.14}$$

2. Отметим, что условие сильной эллиптичности (I.9) налагает существенные ограничения на функции $A_\alpha(x,\xi,\eta)$ с $|\alpha|=m$. Справедлива лемма.

Лемма I.I. Пусть выполнены условия (I.3), (I.5)-(I.7) и (I.9). Тогда в равенстве (I.5) функции $a_\alpha(x,\xi)\equiv a_\alpha(x)$ не зависят от ξ и кроме того

$$|a_\alpha(x)|\leqslant C \quad в \quad G; \tag{1.15}$$

$$\Pi(x,\eta)\equiv\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)P_\alpha(\eta)\eta_\alpha \geqslant \gamma_0^{2}\sum_{|\alpha|=m}|\eta_\alpha|^{p}. \tag{1.16}$$

Доказательство.

Если при каком-то α имеем $P_\alpha(\eta)\equiv 0$, то можно считать $a_\alpha(x,\xi)\equiv 0$.

Пусть $\eta=\xi^{m}$ и α фиксированы, $P_\alpha(\eta)\neq 0$. Тогда из (I.3) и (I.5)-(I.7) следует, что при $|\xi|\leqslant 1$ имеем:

$$|a_\alpha(x,\xi)|=\frac{|a_\alpha(x,\xi)P_\alpha(\eta)|}{|P_\alpha(\eta)|}=$$

$$=\frac{|A_\alpha(x,\xi,\eta)-\tilde{A}_\alpha(x,\xi,\eta)|}{|P_\alpha(\eta)|}\leqslant\frac{C(1+|\xi|^{p-1}+|\eta|^{p-1}}{|P_\alpha(\eta)|}\leqslant C,$$

и при $|\xi| \geq 1$ имеем:

$$|a_\alpha(x,\xi)| = \frac{|a_\alpha(x,\xi) P_\alpha(|\xi|\eta)|}{|\xi|^{p-1}\,|P_\alpha(\eta)|} \leq \frac{C(1+|\xi|^{p-1}+|\xi|^{p-1}|\eta|^{p-1})}{|\xi|^{p-1}\,|P_\alpha(\eta)|} \leq C,$$

то есть справедлива оценка:

$$|a_\alpha(x,\xi)| \leq C. \tag{1.17}$$

Пусть $\Pi(x,\xi,\eta) \equiv \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,\xi) P_\alpha(\eta)\eta_\alpha$. В силу оценки (I.6) для любого $\delta > 0$ найдется $R(\delta)$ такое, что

$$\left| \sum_{|\alpha|=m} \left[\tilde{A}_\alpha(x,\xi,\eta) - \tilde{A}_\alpha(x,\xi,0)\right]\eta_\alpha \right| \leq$$

$$\leq C \sum_{|\alpha|=m} |\eta_\alpha|^{p-\min(1,\sigma)} \leq \delta \sum_{|\alpha|=m} |\eta_\alpha|^p$$

при $|\eta| \geq R(\delta)$, то есть, полагая в неравенстве (I.9) $\xi = \xi'$, $\eta' = 0$ получим:

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,\xi) P_\alpha(\eta)\eta_\alpha \geq \gamma_0^2 \sum_{|\alpha|=m} |\eta_\alpha|^p - \sum_{|\alpha|=m} \left[\tilde{A}_\alpha(x,\xi,\eta) - \tilde{A}_\alpha(x,\xi,0)\right]\eta_\alpha \geq$$

$$\geq (\gamma_0^2 - \delta) \sum_{|\alpha|=m} |\eta_\alpha|^p.$$

В силу однородности функции $\Pi(x,\xi,\eta)$ по η последнее неравенство справедливо при всех η и в силу произвольности $\delta > 0$ имеем:

$$\Pi(x,\xi,\eta) \geq \gamma_0^2 \sum_{|\alpha|=m} |\eta_\alpha|^p. \tag{1.18}$$

Зафиксируем $x \in G$ и $\eta \neq 0$. Если $\Pi(x,\xi,\eta)$ зависит от ξ, то найдутся ξ, ξ' и $\varkappa > 0$ такие, что

$$0 < \frac{\Pi(x,\xi,\eta)}{\Pi(x,\xi',\eta)} < \left(\frac{\varkappa}{\varkappa+1}\right)^{p-1}. \tag{1.19}$$

В силу оценок (I.3) и (I.6) найдется $R > 0$ такое, что

$$\sum_{|\alpha|=m}\left[\tilde{A}_\alpha(x,\xi,R(\varkappa+1)\eta)-\tilde{A}_\alpha(x,\xi',R\varkappa\eta)\right]R\eta_\alpha+$$

$$+\sum_{|\alpha|=m-1}\left[A_\alpha(x,\xi,R(\varkappa+1)\eta)-A_\alpha(x,\xi',R\varkappa\eta)\right](\xi_\alpha-\xi'_\alpha)\leqslant$$

$$\leqslant C R^{p-\min(1,\sigma)}\leqslant\left(\frac{\gamma_0^2}{2}\sum_{|\alpha|=m}|\eta_\alpha|^p\right)R^p.$$

Заменяя в условии (I.9) η на $R(\varkappa+1)\eta$ и η' на $R\varkappa\eta$, получим, что

$$\sum_{|\alpha|=m}\left[a_\alpha(x,\xi)P_\alpha(R(\varkappa+1)\eta)-a_\alpha(x,\xi')P_\alpha(R\varkappa\eta)\right]R\eta_\alpha\geqslant$$

$$\geqslant\gamma_0^2\sum_{|\alpha|=m}|R\eta_\alpha|^p-\sum_{|\alpha|=m}\left[\tilde{A}_\alpha(x,\xi,R(\varkappa+1)\eta)-\tilde{A}_\alpha(x,\xi',R\varkappa\eta)\right]R\eta_\alpha-$$

$$-\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}\left[A_\alpha(x,\xi,R(\varkappa+1)\eta)-A_\alpha(x,\xi',R\varkappa\eta)\right](\xi_\alpha-\xi'_\alpha)\geqslant\frac{\gamma_0^2}{2}R^p\sum_{|\alpha|=m}|\eta_\alpha|^p>0.$$

С другой стороны, в силу (I.I9),

$$\sum_{|\alpha|=m}\left[a_\alpha(x,\xi)P_\alpha(R(\varkappa+1)\eta)-a_\alpha(x,\xi')P_\alpha(R\varkappa\eta)\right]R\eta_\alpha=$$

$$=R^p\left[(\varkappa+1)^{p-1}\Pi(x,\xi,\eta)-\varkappa^{p-1}\Pi(x,\xi',\eta)\right]<0.$$

Полученное противоречие показывает, что $\Pi(x,\xi,\eta)\equiv\Pi(x,\eta)$ не зависит от ξ.

Пусть мультииндекс $\hat{\alpha}$ фиксирован и $\eta_\alpha=1$ при $\alpha=\hat{\alpha}$, $\eta_\alpha=0$ при $\alpha\neq\hat{\alpha}$ Тогда

$$\Pi(x,\eta)=a_{\hat{\alpha}}(x,\xi)P_{\hat{\alpha}}(\eta)\geqslant\gamma_0^2>0,$$

откуда следует, что $a_{\hat{\alpha}}(x,\xi)=\dfrac{\Pi(x,\eta)}{P_{\hat{\alpha}}(\eta)}$ не зависит от ξ.

Из оценок (I.I7) и (I.I8) получаем теперь требуемые неравенства (I.I5) и (I.I6).

Лемма I.I доказана.

3. В заключение параграфа приведем пример задачи, для которой выполнены все сформулированные выше условия.

Пример I.I. Рассмотрим в области G с границей класса C^4 задачу:

$$\begin{cases} \varepsilon^p \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u) - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\left[1+\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right]^{\frac{q-2}{2}}\right\} = f(x), & (1.20) \\ u\big|_{\partial G} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial G} = 0, & (1.21) \end{cases}$$

где $2 \leq q \leq p$, $f(x) \in C^3(\bar{G})$.

Проверим выполнение сформулированных условий.

Выполнение условий (I.3)-(I.7) очевидно.

Оценка (I.9) следует из алгебраического неравенства

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b) \geq 2^{1-p}|a-b|, \qquad (1.22)$$

справедливого при $p \geq 2$; $a, b \in R^1$.

Докажем неравенство (I.22).

В силу выпуклости функции u^α при $\alpha \geq 1$ имеем:

$$|x|^\alpha + |y|^\alpha \geq 2^{1-\alpha}(|x|+|y|)^\alpha \qquad \text{при } x, y \in R^1.$$

Если $ab \leq 0$ то

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b) \geq |a|^p + |b|^p \geq 2^{1-p}(|a|+|b|)^p \geq 2^{1-p}|a-b|^p.$$

Если $a \geq b > 0$, то $|a|^{p-2} + |b|^{p-2} \geq |a-b|^{p-2}$ и из непосредственно проверяемого тождества

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b) = \frac{1}{2}(|a|^{p-2}+|b|^{p-2})(a-b)^2 + \frac{1}{2}(|a|^{p-2}-|b|^{p-2})(a^2-b^2)$$

следует доказываемое неравенство (I.22).

Обозначим далее $b_i(t) \equiv t_i\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n} t_k^2\right)^{\frac{q-2}{2}}$,

$$\beta_{ij}(t)=\frac{\partial b_i(t)}{\partial t_j}=\begin{cases} 2t_it_j\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n}t_k^2\right)^{\frac{q-4}{2}} & \text{для } i\neq j, \\ 2t_it_i\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n}t_k^2\right)^{\frac{q-4}{2}}+\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n}t_k^2\right)^{\frac{q-2}{2}} & \text{для } i=j. \end{cases}$$

Заметим, что для $t,\eta\in R^n$ имеем:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}(t)\eta_i\eta_j=2\left(1+\sum_{k=1}^{n}t_k^2\right)^{\frac{q-4}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}t_k\eta_k\right)^2+\left(1+\sum_{k=1}^{n}t_k^2\right)^{\frac{q-2}{2}}\sum_{k=1}^{n}\eta_k^2,$$

то есть

$$\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}(t)\eta_i\eta_j\geqslant\sum_{i=1}^{n}|t_i|^{q-2}\eta_i^2, \tag{1.23}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}(t)\eta_i\eta_j\geqslant\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2 \tag{1.24}$$

и

$$\left(1+\sum_{k=1}^{n}t_k^2\right)^{\frac{q-2}{2}}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}(t)\eta_i\eta_j\leqslant 3\left(1+\sum_{k=1}^{n}t_k^2\right)^{\frac{q-2}{2}}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2. \tag{1.25}$$

В статье [4] показано, что неравенство (I.23) влечет выполнение условия (I.9).

Неравенство (I.24) означает, что выполнено условие А.

Наконец, условие (I.25) означает равномерную эллиптичность вырожденной задачи (I.I2) и, как показано в [I4] (теорема I0.3 гл. IУ), задача (I.I2) имеет решение $u_0(x)\equiv h(x)$ такое, что $h(x)\in C^2(\bar{G})$ и вторые производные функции h удовлетворяют условию Липшица.

Итак, для задачи (I.20)-(I.2I) выполнены все условия.

§ 3. Вывод уравнения пограничного слоя

I. Как уже было сказано, задача (I.I)-(I.2) имеет при любом $\varepsilon>0$ единственное решение $u_\varepsilon(x)$, а вырожденная задача

(I.I2) имеет единственное решение

$$u_0(x) \equiv h(x) \in C^m(\bar{G}) \cap W_2^{m+1}(G).$$

Если при этом оказывается, что $\left.\frac{\partial^{m-1} h}{\partial \vec{n}^{m-1}}\right|_\Gamma \equiv 0$, то есть, решение вырожденной задачи удовлетворяет всем граничным условиям (I.2), то функция $h(x)$ является главным членом асимптотики решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (I.I)-(I.2). Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема I.I. Пусть $u_\varepsilon(x)$ - решение задачи (I.I)-(I.2), а $h(x) \in C^m(\bar{G}) \cap W_2^{m+1}(G)$ - решение задачи (I.I2), причем $\left.\frac{\partial^{m-1}}{\partial \vec{n}^{m-1}} h\right|_\Gamma = 0$. Тогда

$$\| u_\varepsilon(x) - h(x) \|_{W_p^m(G)} \leqslant C\varepsilon \tag{1.26}$$

и

$$\| u_\varepsilon(x) - h(x) \|_{W_q^{m-1}(G)} \leqslant C\varepsilon^{2p/q}, \tag{1.27}$$

где константы C не зависят от ε.

Доказательство.

Из условий теоремы следует, что $h(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(G)$ и

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \int_G B_\alpha(x, \delta h) \mathcal{D}^\alpha (u_\varepsilon - h)\, dx = 0.$$

Поэтому,

$$\langle T_{2m}^\varepsilon(u_\varepsilon) - T_{2m}^\varepsilon(h), u_\varepsilon - h \rangle = - \langle T_{2m}^\varepsilon(h), u_\varepsilon - h \rangle =$$

$$= -\varepsilon^p \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_G A_\alpha(x, \delta h, \mathcal{D}^m h) \mathcal{D}^\alpha (u_\varepsilon - h)\, dx. \tag{1.28}$$

Оценим правую часть последнего равенства сверху. Для $|\alpha| \leqslant m-1$ имеем:

$$\int_G \varepsilon^p A_\alpha(x, \delta h, \mathcal{D}^m h) \mathcal{D}^\alpha (u_\varepsilon - h)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^{2p}\int_G |A_\alpha(x,\delta h,\mathcal{D}^m h)|^2 dx + \frac{\gamma_3^2}{6}\int_G |\mathcal{D}^\alpha(u_\varepsilon - h)|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^{2p} + \frac{\gamma_3^2}{3}\int_G |\mathcal{D}^\alpha(u_\varepsilon - h)|^2 dx ,$$

где здесь и далее C означает некоторую константу, не зависящую от ε.

Пусть $|\alpha| = m$ и $\alpha_k \neq 0$, тогда

$$\left| \int_G \varepsilon^p A_\alpha(x,\delta h,\mathcal{D}^m h)\,\mathcal{D}^\alpha(u_\varepsilon - h)\,dx \right| =$$

$$= \left| -\int_G \varepsilon^p \frac{\partial}{\partial x_k} A_\alpha(x,\delta h,\mathcal{D}^m h)\,\mathcal{D}^{\hat\alpha}(u_\varepsilon - h)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^{2p}\int_G \left|\frac{\partial}{\partial x_k} A_\alpha(x,\delta h,\mathcal{D}^m h)\right|^2 dx + \frac{\gamma_3^2}{6n}\int_G |\mathcal{D}^{\hat\alpha}(u_\varepsilon - h)|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^{2p} + \frac{\gamma_3^2}{6n}\int_G |\mathcal{D}^{\hat\alpha}(u_\varepsilon - h)|^2 dx ,$$

где $\hat\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k - 1, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$, то есть $|\hat\alpha| = m-1$.

Оценивая указанным образом интегралы в равенстве (I.28) и учитывая, что любой мультииндекс $\hat\alpha$ получается не более чем из n мультииндексов α с $|\alpha| = m$, получим:

$$\left| \langle T^\varepsilon_{2m}(u_\varepsilon) - T^\varepsilon_{2m}(h), u_\varepsilon - h \rangle \right| \leqslant C\varepsilon^{2p} + \frac{\gamma_3^2}{3}\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}\int_G |\mathcal{D}^\alpha(u_\varepsilon - h)|^2 dx .$$

Последнее неравенство вместе с неравенством (I.I4) приводит к доказываемым оценкам (I.26) и (I.27).

Теорема I.I доказана.

2. Будем считать далее, что $\left.\dfrac{\partial^{m-1} h}{\partial \vec n^{\,m-1}}\right|_\Gamma \neq 0$, тогда функция $h(x)$ не принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_p^m(G)$, и рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы I.I, теряют силу.

Следуя методике М.И. Вишика и Л.А. Люстерника, мы предположим, что главный член асимптотики решения задачи (I.I)-(I.2) имеет вид:

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = h(x) + \varepsilon^{m-1} U(\varepsilon, x) + \varepsilon \Psi(\varepsilon, x). \qquad (1.29)$$

Функция $U(\varepsilon, x)$ вводится для того, чтобы компенсировать невязку в выполнении граничного условия $\frac{\partial^{m-1} u}{\partial \vec{n}^{m-1}}\Big|_\Gamma = 0$. Поэтому, от функции $U(\varepsilon, x)$ требуется, чтобы

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial \vec{n}^{m-1}} \left[h(x) + \varepsilon^{m-1} U(\varepsilon, x) \right] \Big|_\Gamma = 0. \qquad (1.30)$$

Кроме того, требуется, чтобы функция $U(\varepsilon, x)$ имела характер пограничного слоя, то есть, чтобы

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} U(\varepsilon, x) = 0 \quad \text{во внутренних точках } x \text{ области } G. \qquad (1.31)$$

Поскольку функция $h(x) + \varepsilon^{m-1} U(\varepsilon, x)$ не будет, вообще говоря, удовлетворять граничным условиям $\frac{\partial^s}{\partial \vec{n}^s} U\Big|_\Gamma = 0$ с $s = 0, \ldots, m-2$, то в"приближенное решение" (I.29) вводится функция $\Psi(\varepsilon, x)$, равномерно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ограниченная вместе со всеми своими производными по x. Функция $\Psi(\varepsilon, x)$ выбирается так, чтобы функция $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ удовлетворяла всем граничным условиям (I.2), то есть так, что

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon \frac{\partial^s \Psi}{\partial \vec{n}^s}\Big|_\Gamma = -\varepsilon^{m-1} \frac{\partial^s}{\partial \vec{n}^s} U(\varepsilon, x)\Big|_\Gamma \qquad \text{для } s = 0, \ldots, m-2 \\ &\frac{\partial^{m-1}}{\partial \vec{n}^{m-1}} \Psi(\varepsilon, x)\Big|_\Gamma = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.32)$$

Для построения функции $U(\varepsilon, x)$ нам будет удобно ввести в окрестности границы Γ новые локальные координаты.

Пусть Γ покрыта конечным числом N окрестностей Γ^K, гомеоморфных шару в R^{n-1} с локальными координатами $\varphi^K=(\varphi_1^K,\dots,\varphi_{n-1}^K)$, $\varphi^K\in\Phi^K$. В некоторой окрестности Γ через каждую точку $x\in G$ проходит ровно одна нормаль к границе. Пусть $\rho(x)$ - расстояние вдоль этой нормали от точки x до границы. Для достаточно малого $s>0$ обозначим Γ_s^K множество таких точек x из $\bar G$, для которых $\rho(x)\leq s$ и точка пересечения нормали, проходящей через точку x, с границей принадлежит множеству Φ^K. Пусть $\varphi^K(x)$ - координата этой точки пересечения. Положим $\Gamma_s=\bigcup\limits_{K=1}^{N}\Gamma_s^K$.

В силу гладкости Γ, мы можем выбрать $s>0$ и координаты φ^K так, что функции

$$C_{0i}^K(\rho,\varphi^K)=\frac{\partial}{\partial x_i}\rho\Big|_{x=x(\rho,\varphi^K)},\quad C_{ji}^K(\rho,\varphi^K)=\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_j^K\Big|_{x=x(\rho,\varphi^K)} \tag{1.33}$$

принадлежат классу $C^m([0,3s]\times\Phi^K)$ и якобиан

$$J(\rho,\varphi^K)=\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(\rho,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})}\neq 0. \tag{1.34}$$

Будем далее, рассматривая фиксированную окрестность Γ_s^K, опускать для краткости индекс K вверху, указывающий номер окрестности.

3. Мы предположим, что погранслойная поправка $U(\varepsilon,x)$ быстро изменяется по нормальному к границе направлению и медленно изменяется по касательным направлениям, так что $\frac{\partial}{\partial\vec n}U(\varepsilon,x)\sim\frac{1}{\varepsilon}$ и $\frac{\partial}{\partial\varphi_K}U(\varepsilon,x)\sim 1$. Более точно, мы предположим, что в локальных координатах (ρ,φ) погранслойная поправка имеет вид:

$$U(\varepsilon,x)=v\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho(x),\varphi(x)\right), \tag{1.35}$$

где $v(t,\varphi)$ - подлежащая определению функция и $t=\frac{1}{\varepsilon}\rho$ - новая "регуляризованная" переменная.

Потребовав, чтобы функция $v(t,\varphi)$ обращала в нуль старшие при $\varepsilon\to 0^+$ члены в разложении по степеням ε выражения

$$L_\varepsilon(v)\equiv\varepsilon^p\mathcal{T}_{2m}(\tilde{u}_\varepsilon)+\mathcal{T}_{2m-2}(\tilde{u}_\varepsilon),$$

где $\tilde{u}_\varepsilon$ определено согласно (I.29) и (I.35), мы получим уравнение для определения функции $v(t,\varphi)$:

$$L_0(v)=0. \qquad (1.36)$$

Потребовав, чтобы функция $u(\varepsilon,x)$, определенная согласно (I.35), удовлетворяла условиям (I.30) и (I.3I), мы получим граничные условия для функции $v(t,\varphi)$:

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}v\Big|_{t=0}=\tau_0(\varphi)\equiv\frac{\partial^{m-1}h}{\partial\vec{n}^{\,m-1}}\Big|_\Gamma,\quad \lim_{t\to+\infty}v(t,\varphi)=0. \qquad (1.37)$$

При выводе уравнения (I.36) мы будем временно предполагать, что выполнены некоторые дополнительные условия. А именно, предположим, что выполнены условия следующей леммы.

<u>Лемма I.2.</u> Пусть $h(x),\ \psi(\varepsilon,x)\in C^{2m}(\bar{G})$; $C_{ji}(\rho,\varphi)\in C^{2m}([0,3s]\times\Phi)$, $v(t,\varphi)\in C^{2m}(R^+\times\Phi)$ и

$$\lim_{t\to+\infty}t^K\frac{\partial^s}{\partial t^s}v(t,\varphi)=0 \quad \text{для } K\geq 0,\ s\leq 2m.$$

Пусть еще

$$\left|\frac{\partial A_\alpha(x,\xi,\eta)}{\partial\eta_\beta}\right|\leq C(1+|\xi|^{p-1}+|\eta|^{p-2}) \qquad \text{для } |\alpha|=|\beta|=m,$$

$$\left|\frac{\partial B_\alpha(x,\xi)}{\partial\xi_\beta}\right|\leq C(1+|\xi|^{p-2}) \qquad \text{для } |\alpha|=|\beta|=m-1.$$

Тогда

$$\varepsilon^{m-1}L_\varepsilon(v)=L_0(v)+\varepsilon^{\min(1,\sigma)}R(\varepsilon,t,\varphi),$$

где $|R(\varepsilon,t,\varphi)|\leq C$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $t\in R^+$, $\varphi\in\Phi$;

$$L_0(v)=(-1)^m\delta(\varphi)\frac{\partial^m}{\partial t^m}\Lambda_p\left(\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\right)+(-1)^{m-1}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}g\left(\frac{\partial^{m-1}v}{\partial t^{m-1}},\varphi\right); \qquad (1.38$$

$$\delta(\varphi)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x(0,\varphi))P_\alpha(\xi^m(0,\varphi))\xi_\alpha(0,\varphi); \qquad (1.39$$

$$\Lambda_p(\tau)=\tau|\tau|^{p-2};$$

$$g(\tau,\varphi)=\sum_{|\alpha|=m-1}\xi_\alpha(0,\varphi)B_\alpha(x,h,\mathcal{D}^1h,\dots,\mathcal{D}^{m-2}h,\mathcal{D}^{m-1}h+\tau\xi^{m-1}(0,\varphi))\Big|_{x=x(0,\varphi)}; \qquad (1.40$$

$$\xi_\alpha(\rho,\varphi)=\prod_{i=1}^{n}C_{0\alpha_i}(\rho,\varphi).$$

Замечание I.3. Отметим, что в равенство (I.38) не входит функция $\Psi(\varepsilon,x)$. Поэтому функция $\Psi(\varepsilon,x)$ определяется после того, как определены $h(x)$ и $U(\varepsilon,x)$.

Доказательство леммы I.2.

Заметим, что для достаточно гладкой функции $z(x)$ имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=C_{0i}(\rho,\varphi)\frac{\partial z}{\partial\rho}+\sum_{k=1}^{n-1}C_{ki}(\rho,\varphi)\frac{\partial z}{\partial\varphi_k}=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}C_{0i}(\varepsilon t,\varphi)\frac{\partial z}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n-1}C_{ki}(\varepsilon t,\varphi)\frac{\partial z}{\partial\varphi_k},$$

и поэтому:

$$\mathcal{D}_x^\alpha z=\frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}}\left[\xi_\alpha(\varepsilon t,\varphi)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t^{|\alpha|}}z+\varepsilon M_{|\alpha|}(\varepsilon,z)\right], \qquad (1.41$$

где $M_{|\alpha|}(\varepsilon,z)$ – линейная комбинация производных функции z по переменным $(t,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$, коэффициенты которой являются равномерно по $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\rho\in[0,s]$, $\varphi\in\Phi$ ограниченными функциями ε, ρ и φ. При этом $M_{|\alpha|}(\varepsilon,z)$ содержит производные порядка не выше $|\alpha|$, а производные порядка $|\alpha|$, входящие в $M_{|\alpha|}(\varepsilon,z)$ содержат не более $(|\alpha|-1)$ дифференцирования по t.

Из равенства (I.4I) следует, что

$$\left.\begin{aligned}
&|\mathcal{D}_x^\alpha \tilde{u}_\varepsilon - \mathcal{D}_x^\alpha h| \leq C\varepsilon && \text{при } |\alpha| < m-1,\\
&\left|\mathcal{D}_x^\alpha \tilde{u}_\varepsilon - \left(\mathcal{D}_x^\alpha h + \xi_\alpha(0,\varphi)\frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}\right)\right| \leq C\varepsilon && \text{при } |\alpha| = m-1,\\
&\left|\varepsilon^{|\alpha|+1-m}\mathcal{D}_x^\alpha \tilde{u}_\varepsilon - \xi_\alpha(0,\varphi)\frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial t^{|\alpha|}}\right| \leq C\varepsilon && \text{при } |\alpha| > m-1,
\end{aligned}\right\} \qquad (1.42)$$

и, в частности,

$$|\mathcal{D}_x^\alpha \tilde{u}_\varepsilon| \leq C \quad \text{при } |\alpha| \leq m-1,$$
$$|\mathcal{D}_x^\alpha \tilde{u}_\varepsilon| \leq C\varepsilon^{m-1-|\alpha|} \quad \text{при } |\alpha| > m-1.$$

Из этих оценок вытекает, что

$$|\varepsilon^{m-1}\mathcal{D}_x^\alpha B_\alpha(x,\delta\tilde{u}_\varepsilon)| \leq C\varepsilon \quad \text{при } |\alpha| < m-1,$$
$$|\varepsilon^{m-1}\mathcal{D}_x^\alpha B_\alpha(x,\delta\tilde{u}_\varepsilon) - [\xi_\alpha(0,\varphi)B_\alpha(x,h,\ldots,\mathcal{D}^{m-1}h + \tau\xi^{m-1}(0,\varphi))|_{x=x(0,\varphi)}]| \leq C\varepsilon \quad \text{при } |\alpha| = m-1,$$
$$|\varepsilon^{m-1+p}\mathcal{D}_x^\alpha A_\alpha(x,\delta\tilde{u}_\varepsilon,\mathcal{D}^m\tilde{u}_\varepsilon)| \leq C\varepsilon \quad \text{при } |\alpha| < m,$$
$$|\varepsilon^{m-1+p}\mathcal{D}_x^\alpha \tilde{A}_\alpha(x,\delta\tilde{u}_\varepsilon,\mathcal{D}^m\tilde{u}_\varepsilon)| \leq C\varepsilon^{\min(1,\sigma)} \quad \text{при } |\alpha| = m,$$
$$|\varepsilon^{m-1+p}\mathcal{D}_x^\alpha a_\alpha(x)P_\alpha(\mathcal{D}^m\tilde{u}_\varepsilon) - a_\alpha(x(0,\varphi))P_\alpha(\xi^m(0,\varphi))\xi_\alpha(0,\varphi)| \leq C\varepsilon,$$

откуда и следует справедливость леммы I.2.

Ниже будет установлено, что не существует функции $v(t,\varphi)$, имеющей указанную в лемме I.2 гладкость и являющейся решением задачи (I.36)-(I.37), где левая часть в уравнении (I.36) определена равенством (I.38). Тем не менее будет показано, что функция $\tilde{u}_\varepsilon(x)$, определенная по формулам (I.29), (I.35), где $v(t,\varphi)$ - обобщенное решение задачи (I.36)-(I.37), является главным членом асимптотики при $\varepsilon \to 0^+$ решения $u_\varepsilon(x)$ краевой задачи (I.I)-(I.2).

Отметим только, что формулы (I.42) справедливы при $|\alpha| \leq m$, если функция $v(t,\varphi)$ имеет лишь m непрерывных производных.

Рассмотрим теперь уравнение (I.36) безотносительно к условиям, при которых оно было выведено. Точнее, предположим, что попрежнему выполнены лишь условия, сформулированные в § 2 данной главы. Тогда справедлива лемма.

Лемма I.3. Пусть функции $\delta(\varphi)$ и $g(\tau,\varphi)$ определены формулами (I.39) и (I.40) соответственно. Тогда $\delta(\varphi) \in C^m(\Phi)$, $g(\tau,\varphi) \in C^m(R^1 \times \Phi)$ и имеют место оценки

$$\delta(\varphi) \geqslant \gamma_5^2 > 0, \quad g'_\tau(\tau,\varphi) \geqslant \gamma_6^2 > 0.$$

Доказательство.

Свойства гладкости функций $\delta(\varphi)$ и $g(\tau,\varphi)$ следуют непосредственно из определений (I.39) и (I.40), если учесть свойства гладкости функций $a_\alpha(x)$, $B_\alpha(x,\xi)$ и функций $C_{ji}(\rho,\varphi)$, определенных равенствами (I.33).

В силу леммы I.I и условия (I.34), имеем:

$$\delta(\varphi) = \Pi(x(0,\varphi), \xi^m(0,\varphi)) \geqslant \gamma_0^2 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha(0,\varphi)|^p \geqslant \gamma_5^2 > 0.$$

Наконец, по условию (I.I3),

$$g'_\tau(\tau,\varphi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m-1} \frac{\partial B_\alpha(x,\xi)}{\partial \xi_\beta}\Bigg|_{\substack{x=x(0,\varphi)\\ \xi=\xi(0,\varphi)}} \cdot \xi_\alpha(0,\varphi)\,\xi_\beta(0,\varphi) \geqslant$$

$$\geqslant \gamma_4^2 \sum_{|\alpha|=m-1} [\xi_\alpha(0,\varphi)]^2 \geqslant \gamma_6^2 > 0.$$

Лемма I.3 доказана

§ 4. Построение пограничного слоя

Будем в следующих двух параграфах считать, что $p>2$, $2 \leqslant q \leqslant p$.

I. Рассмотрим частный случай задачи (I.36)-(I.37) для определения погранслоя:

$$-\delta(\varphi)\frac{d}{dt}\Lambda_p\left(\frac{d\tau}{dt}\right)+g(\tau,\varphi)=0\,, \tag{1.43}$$

$$\tau(0,\varphi)=\tau_0(\varphi),\qquad \lim_{t\to+\infty}\tau(t,\varphi)=0. \tag{1.44}$$

Пусть $\varphi\in\Phi$ фиксировано. Ниже будет показано, что задача (I.43)-(I.44) не имеет, вообще говоря, классического решения, поэтому будем понимать решение задачи (I.43)-(I.44) в обобщенном смысле. Именно, назовем функцию $\tau(t,\varphi)\in W_p^1(R^+)$ решением задачи (I.43)-(I.44), если для любой функции $z(t)\in \overset{\circ}{W}{}_p^1(R^+)$

$$\delta(\varphi)\int_0^\infty\Lambda_p\left(\frac{d\tau}{dt}\right)\frac{dz}{dt}\,dt+\int_0^\infty g(\tau,\varphi)z\,dt=0 \tag{1.45}$$

и выполнены условия(I.44). Заметим, что так как $W_p^1(R^+)\subset C(R^+)$ (см., например, [23]), то условия (I.44) имеют смысл для функций из $W_p^1(R^+)$.

Справедлива лемма.

Лемма I.4. Пусть $g(\tau,\varphi)\in C^1(R^1)$, причем $g(0,\varphi)=0$ и $g'_\tau(\tau,\varphi)\geq\gamma^2>0$. Пусть $\delta(\varphi)\geq\gamma^2>0$. Тогда задача (I.43)-(I.44) имеет единственное в $W_p^1(R^+)$ решение $\tau(t,\varphi)$.

При этом

$$\operatorname{supp}_t\tau(t,\varphi)=[0,B(\varphi)]\,,\qquad \text{где}\quad B(\varphi)<\infty$$

и

$$\tau(t,\varphi)\in C^1(R^+)\cap C^3(R^+\setminus\{B(\varphi)\}).$$

Если $2<p<4$, то $\tau(t,\varphi)\in C^2(R^+)$.

Доказательство леммы I.4.

Единственность. Если $\tau(t,\varphi)$ и $\tilde\tau(t,\varphi)$ - два решения в классе $W_p^1(R^+)$ задачи (I.43)-(I.44), то $\tau(t,\varphi)-\tilde\tau(t,\varphi)\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(R^+)$ и, значит,

$$0 = \delta(\varphi)\int_0^\infty \left[\Lambda_p\left(\frac{d\tau}{dt}\right) - \Lambda_p\left(\frac{d\tilde{\tau}}{dt}\right)\right]\left(\frac{d\tau}{dt} - \frac{d\tilde{\tau}}{dt}\right) dt +$$

$$+ \int_0^\infty \left[g(\tau,\varphi) - g(\tilde{\tau},\varphi)\right](\tau - \tilde{\tau})\, dt \geq$$

$$\geq \int_0^\infty \left[g(\tau,\varphi) - g(\tilde{\tau},\varphi)\right](\tau - \tilde{\tau})\, dt \geq \gamma^2 \int_0^\infty (\tau - \tilde{\tau})^2\, dt ,$$

откуда следует, что $\tau(t,\varphi) \equiv \tilde{\tau}(t,\varphi)$.

Существование. В силу условия $g(0,\varphi) = 0$, уравнение (I.43) имеет тривиальное решение, которое будет являться решением задачи (I.43)-(I.44), если $\tau_0(\varphi) = 0$.

Сделав в уравнении (I.43) формальную замену $\tau'_t = a(\tau)$, мы получим, что

$$\delta(\varphi)\,\frac{p-1}{p}\,\frac{d}{d\tau}\,|a|^p = g(\tau,\varphi).$$

Отсюда следует, что

$$\tau'_t(t,\varphi) = a(\tau) = \pm\left(\frac{p}{p-1}\,\delta^{-1}(\varphi)\int_0^\tau g(\tau,\varphi)\,d\tau + C_1\right)^{1/p},$$

то есть

$$t = \pm\int_\tau^{\tau_0(\varphi)} \left(\frac{p}{p-1}\,\delta^{-1}(\varphi)\int_0^s g(\tau,\varphi)\,d\tau + C_1\right)^{1/p} ds + C_2 . \qquad (1.46)$$

Таким образом, любое решение $\tau(t,\varphi)$ уравнения (I.43) можно определить в некоторой окрестности точки t_0, где $\tau'_t(t_0,\varphi) \neq 0$, из соотношения (I.46), выбрав надлежащим образом константы C_1 и C_2.

Положим в равенстве (I.46) константы $C_1 = C_2 = 0$, возьмем перед интегралом знак, совпадающий со знаком τ , и обозначим

$$S(s,\varphi) \equiv \frac{p}{p-1}\,\delta^{-1}(\varphi)\int_0^s g(\tau,\varphi)\,d\tau , \qquad (1.47)$$

$$H(\tau,\varphi) \equiv \left|\int_\tau^{\tau_0(\varphi)} \frac{ds}{S(s,\varphi)^{1/p}}\right| , \qquad \text{для } \tau_0(\varphi) \neq 0 . \qquad (1.48)$$

Тогда соотношение (I.46) примет вид:

$$t = H(\tau,\varphi). \tag{1.49}$$

Мы покажем, что равенство (I.49) определяет при $t \in [0, B(\varphi))$, где

$$B(\varphi) = \left| \int_0^{\tau_0(\varphi)} \frac{ds}{S(s,\varphi)^{1/p}} \right| , \tag{1.50}$$

функцию $\tau(t,\varphi)$ такую, что $\tau(t,\varphi) \in C^3([0, B(\varphi)))$, $\tau'_t(t,\varphi) \neq 0$ при $t \in [0, B(\varphi))$ и

$$\lim_{t \to B(\varphi)-0} \tau(t,\varphi) = \lim_{t \to B(\varphi)-0} \tau'_t(t,\varphi) = 0. \tag{1.51}$$

Если функция $\tau(t,\varphi)$, определяемая соотношением (I.49), удовлетворяет указанным условиям, то, доопределяя ее нулем для $t \in [B(\varphi), +\infty)$, мы получим искомое решение задачи (I.43)-(I.44). В самом деле, такая функция (будем по-прежнему обозначать ее $\tau(t,\varphi)$) является классическим решением уравнения (I.43) при $t \in [0, B(\varphi))$ и $t \in (B(\varphi), +\infty)$, и для $z(t) \in C_0^\infty(R^+)$ имеем:

$$\delta(\varphi) \int_0^\infty \Lambda_p\left(\frac{d\tau}{dt}\right) \frac{dz}{dt}\, dt + \int_0^\infty g(\tau,\varphi)\, z\, dt =$$

$$= \delta(\varphi) \int_0^{B(\varphi)} \Lambda_p\left(\frac{d\tau}{dt}\right) \frac{dz}{dt}\, dt + \int_0^{B(\varphi)} g(\tau,\varphi)\, z\, dt =$$

$$= \int_0^{B(\varphi)} \left[-\delta(\varphi) \frac{d}{dt} \Lambda_p\left(\frac{d\tau}{dt}\right) + g(\tau,\varphi)\right] z\, dt + \delta(\varphi) \Lambda_p\left(\frac{d\tau}{dt}\right) z(t) \Big|_{t=0}^{B(\varphi)} = 0.$$

Откуда следует, что (I.45) выполнено для всех $z(t) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(R^+)$.

Заметим, что для функции $S(s,\varphi)$, определенной равенством (I.47), имеем

$$S(0,\varphi) = S'_s(0,\varphi) = 0, \qquad S''_{ss}(s,\varphi) \geq \tilde{\gamma}^2 > 0. \tag{1.52}$$

Поэтому функция $S(s,\varphi)$ имеет при $s=0$ нуль кратности два и не имеет других нулей, а значит функция $H(\tau,\varphi)$, задаваемая

равенством (I.48), определена при $\tau \in R^1$ и, в частности,

$$H(0,\varphi) = b(\varphi) < +\infty .$$

Пусть для определенности $\tau_0(\varphi) > 0$, тогда $H'_\tau(\tau,\varphi) = -S(\tau,\varphi)^{-1/p} < 0$ при $\tau \in (0,\tau_0(\varphi)]$, $H(0,\varphi) = b(\varphi)$, $H(\tau_0(\varphi),\varphi) = 0$, то есть соотношение (I.49) определяет (см. рис. I) при $t \in [0, b(\varphi))$ монотонно убывающую от $\tau_0(\varphi)$ до 0 функцию $\tau(t,\varphi) \in C^3([0,b(\varphi)))$.

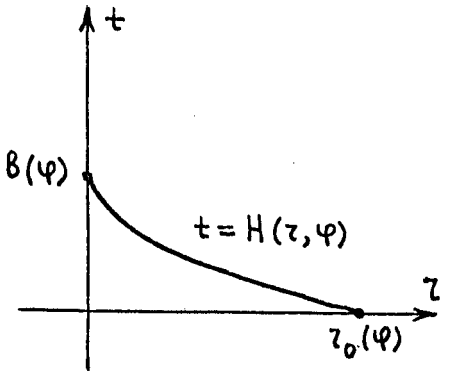

рис. I

Аналогично, при $\tau_0(\varphi) < 0$ соотношение (I.49) определяет при $t \in [0, b(\varphi))$ монотонно возрастающую от $\tau_0(\varphi)$ до 0 функцию $\tau(t,\varphi) \in C^3([0,b(\varphi)))$.

Поскольку

$$\tau'_t(t,\varphi) = \frac{1}{H'_\tau(\tau,\varphi)} = -\operatorname{sgn}\tau \cdot S(\tau,\varphi)^{1/p},$$

то выполнены оба условия в (I.5I), то есть функция $\tau(t,\varphi)$, доопределенная нулем для $t \in [b(\varphi),+\infty)$, и есть искомое решение задачи (I.43)-(I.44).

Заметим еще, что

$$\tau''_{tt}(t,\varphi) = \frac{H''_{\tau\tau}(\tau,\varphi)}{(\tau'_t(t,\varphi))^2 H'_\tau(\tau,\varphi)} =$$

$$= -\frac{H''_{\tau\tau}(\tau,\varphi)}{(H'_\tau(\tau,\varphi))^3} = \frac{1}{p-1}\,\delta^{-1}(\varphi)\,S(\tau,\varphi)^{\frac{2}{p}-1}\,g(\tau,\varphi)$$

и, в силу условий (I.52),

$$\lim_{t\to B(\varphi)-0} z''_{tt}(t,\varphi)=0 \qquad \text{для} \quad 2\left(\frac{2}{p}-1\right)+1>0,$$

то есть для $p<4$;

$$\lim_{t\to B(\varphi)-0} z''_{tt}(t,\varphi)=\mathrm{const}\neq 0 \qquad \text{для } p=4;$$

$$\lim_{t\to B(\varphi)-0} z''_{tt}(t,\varphi)=\infty \qquad \text{для } p>4,$$

откуда следует принадлежность $z(t,\varphi)$ классу $C^2(R^+)$ при $2<p<4$.

Лемма 1.4. доказана.

Замечание I.4. Из соотношений (I.53) видно, что единственное решение задачи (I.43)-(I.44) не является при $p\geqslant 4$ классическим, то есть, задача (I.43)-(I.44) не имеет, вообще говоря, дважды непрерывно дифференцируемых решений. Это связано с вырождением уравнения (I.43) в точках, где $z'_t(t,\varphi)=0$, и повышение гладкости функции $g(z,\varphi)$ не влечет повышения гладкости решения $z(t,\varphi)$ задачи (I.43)-(I.44).

Займемся теперь изучением свойств функции $z(t,\varphi)$ как функции n переменных $(t,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\in R^+\times\Phi$.

Предварительно рассмотрим пример.

Пример I.2. Пусть в уравнении (1.43) имеем $\delta(\varphi)\equiv 1$, $g(z,\varphi)=\gamma z$ с $\gamma=\frac{2(p-1)}{p-2}\left(\frac{p}{p-2}\right)^{p-1}$. Пусть $\varphi\in\Phi\subset R^1$ и пусть $z_0(\varphi)$ - достаточно гладкая функция, такая, что $z'_0(\varphi_0)\neq 0$ в точках φ_0, где $z_0(\varphi_0)=0$.

Тогда решением задачи (I.43)-(I.44) служит функция

$$z(t,\varphi)=\begin{cases}(B(\varphi)-t)^{p/p-2}\,\mathrm{sgn}\, z_0(\varphi) & \text{при } t\leqslant B(\varphi),\\ 0 \quad \text{при} \quad t>B(\varphi)\end{cases}$$

где

$$B(\varphi)=\left|z_0(\varphi)\right|^{\frac{p-2}{p}}.$$

Замечая, что $b'_\varphi = \frac{p-2}{p}\left|\tau_0(\varphi)\right|^{-\frac{2}{p}}\tau'_0(\varphi)$, непосредственным вычислением можно установить, что

$$\frac{\partial^{k+\alpha_1}\tau(t,\varphi)}{\partial t^k\,\partial\varphi^{\alpha_1}} = O\left((b(\varphi)-t)^{p/p-2-(k+\alpha_1)}\left|\tau_0(\varphi)\right|^{-\alpha_1\frac{2}{p}}\right)$$

при $t \to b(\varphi)-0$, $\varphi \to \varphi_0$.

Следующая лемма показывает, что в общем случае производные решения $\tau(t,\varphi)$ задачи (I.43)-(I.44) ведут себя аналогично.

Будем обозначать:

$$\left.\begin{aligned} Q &= \{(\tau,\varphi)\in R^1\times\Phi:\ 0<\tau\,\mathrm{sgn}\,\tau_0(\varphi)\leqslant \tau_0(\varphi)\,\mathrm{sgn}\,\tau_0(\varphi)\},\\ \Omega &= \{(t,\varphi)\in R^+\times\Phi:\ 0\leqslant t<b(\varphi)\},\\ \mathcal{M} &= \{(t,\varphi)\in R^+\times\Phi:\ t=b(\varphi)\}.\end{aligned}\right\} \qquad (1.54)$$

<u>Лемма I.5.</u> Пусть $\delta(\varphi)\in C^m(\Phi)$, $\tau_0(\varphi)\in C^m(\Phi)$, $g(\tau,\varphi)\in C^m(R^1\times\Phi)$.

Тогда в условиях леммы I.4 функция $b(\varphi)\in C(\Phi)$, то есть, в частности, $b(\varphi)\leqslant b_0<\infty$.

При этом решение $\tau(t,\varphi)$ задачи (I.43)-(I.44) таково, что $\tau(t,\varphi)\in C(R^+\times\Phi)\cap C^m(R^+\times\Phi\setminus\mathcal{M})$ и справедливы оценки:

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}D^\alpha_\varphi\tau(t,\varphi)\right|\leqslant C\,(b(\varphi)-t)^{p/p-2-(k+|\alpha|)}\left|\tau_0(\varphi)\right|^{-|\alpha|\frac{2}{p}} \qquad (1.55)$$

для $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$, $(t,\varphi)\in\Omega$.

<u>Доказательство леммы I.5.</u>

Из равенства (I.47) вытекает, что $S(s,\varphi)\in C^k(R^1\times\Phi)$, а из условий (I.52) следует, что

$$\left|\frac{1}{S(s,\varphi)^{1/p}}\right| = \left|\frac{1}{s^2}\,\frac{s^2}{S(s,\varphi)}\right|^{1/p}\leqslant C s^{-\frac{2}{p}}.$$

Таким образом, подынтегральная функция в равенстве (I.48) принадлежит классу $C^k((R^1\setminus\{0\})\times\Phi)$ и имеет интегрируемую мажо-

ранту, то есть $H(\tau,\varphi) \in C^k(Q) \cap C(\bar{Q})$. В частности, $b(\varphi) \in C(\Phi)$.

Поэтому график функции $t = H(\tau,\varphi)$ – непрерывная гиперповерхность в R^{n+1} над $\bar{Q}$. В пространстве переменных (t,φ) эта поверхность проектируется на множество $\bar{\Omega}$ (см. рис. 2), причем в каждую точку Ω проектируется ровно одна точка границы. Поэтому соотношение (I.49) определяет функцию $\tau(t,\varphi) \in C(\bar{\Omega})$ такую, что $\tau(b(\varphi),\varphi) = 0$. Поскольку $H'_\tau(\tau,\varphi) = S(\tau,\varphi)^{-1/p} \neq 0$ в Q, то в области Ω функция $\tau(t,\varphi)$ имеет такую же гладкость, как гладкость функции $H(\tau,\varphi)$ в Q, то есть $\tau(t,\varphi) \in C^k(\Omega)$.

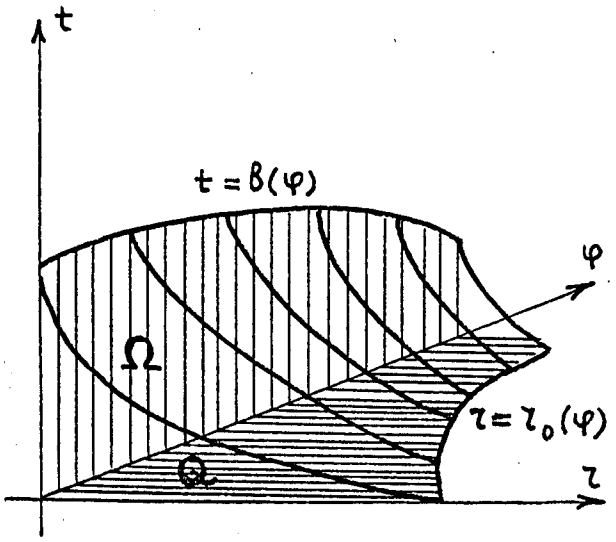

рис. 2

Перейдем теперь к выводу оценок для производных функции $\tau(t,\varphi)$.

Заметим прежде всего, что для произвольного σ функция $\frac{\partial^m}{\partial s^m}\left[S(s,\varphi)^\sigma\right]$ является линейной комбинацией функций вида

$$S^{\sigma-\ell}(s,\varphi)\cdot\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial s^{\nu_1}}S(s,\varphi)\cdot\frac{\partial^{\nu_2}}{\partial s^{\nu_2}}S(s,\varphi)\cdots\frac{\partial^{\nu_\ell}}{\partial s^{\nu_\ell}}S(\tau,\varphi), \qquad (1.56)$$

где $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\ell = m$, $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_\ell \geq 1$; $\ell = 0,1,\ldots,m$;

и функция $D_\varphi^\alpha\left[S(s,\varphi)^\sigma\right]$ является линейной комбинацией функций вида

$$S^{\sigma-\ell}\cdot D_\varphi^{\nu^1}S(s,\varphi)\cdot D_\varphi^{\nu^2}S(s,\varphi)\cdot\ldots\cdot D_\varphi^{\nu^\ell}S(s,\varphi), \qquad (1.57)$$

где $\nu^i=(\nu_1^i,\dots,\nu_{n-1}^i)$; $|\nu^1|+\dots+|\nu^\ell|=|\alpha|$; $|\nu^1|,|\nu^2|,\dots,|\nu^\ell|\geq 1$; $\ell=0,1,\dots,|\alpha|$.

Доказательство этого факта нетрудно получить индукцией по m и $|\alpha|$ соответственно.

Поскольку $\mathcal{D}_\varphi^\alpha S(s,\varphi)\big|_{s=0}=0$ и $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_\varphi^\alpha S(s,\varphi)\big|_{s=0}=0$, то в области Q $|\mathcal{D}_\varphi^\alpha S(s,\varphi)|\leq Cs^2$ при любом $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$ и из (I.57) вытекает, что

$$\left|\mathcal{D}_\varphi^\alpha[S(s,\varphi)^\sigma]\right|\leq Cs^{2\sigma}. \tag{1.58}$$

Далее, так как при $\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_\ell=m$ функция $S^{\sigma-\ell}\cdot\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial s^{\nu_1}}S\cdot\frac{\partial^{\nu_2}}{\partial s^{\nu_2}}S\cdot\dots\cdot\frac{\partial^{\nu_\ell}}{\partial s^{\nu_\ell}}S$ содержит по крайней мере $2\ell-m$ раз множитель $\frac{\partial}{\partial s}S$ и $\left|\frac{\partial}{\partial s}S(s,\varphi)\right|\leq Cs$ в области Q, то

$$\left|S^{\sigma-\ell}\cdot\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial s^{\nu_1}}S\cdot\dots\cdot\frac{\partial^{\nu_\ell}}{\partial s^{\nu_\ell}}S\right|\leq Cs^{2(\sigma-\ell)+2\ell-m}=Cs^{2\sigma-m},$$

то есть $\left|\frac{\partial^m}{\partial s^m}\left[S(s,\varphi)^\sigma\right]\right|\leq Cs^{2s-m}$ и

$$\left|\frac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}}}{\partial s^{\alpha_0}\partial\varphi_1^{\alpha_1}\dots\partial\varphi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}S(s,\varphi)^\sigma\right|\leq Cs^{2\sigma-\alpha_0}$$

в Q. (1.59)

Оценим производные функции $H(\tau,\varphi)$, определенной равенством (I.48).

Пусть $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$ и $\alpha_0\geq 1$, тогда $\mathcal{D}_{\tau,\varphi}^\alpha H(\tau,\varphi)$ - есть линейная комбинация функций вида (I.56) с $\sigma=-\frac{1}{p}$ и $m=\alpha_0-1$. Поэтому, учитывая оценку (I.58), получаем, что

$$\left|\frac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}}}{\partial\tau^{\alpha_0}\partial\varphi_1^{\alpha_1}\dots\partial\varphi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}H(\tau,\varphi)\right|\leq C\tau^{-\left(\frac{2}{p}+\alpha_0-1\right)},\quad \alpha_0\geq 1. \tag{1.60}$$

Далее, индукцией по $|\beta|$ можно получить, что функция $\mathcal{D}_\varphi^\beta H(\tau,\varphi)$, где $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_{n-1})$, имеет вид:

$$\mathcal{D}_\varphi^\beta H(\tau,\varphi)=\int_\tau^{\tau_0(\varphi)}\mathcal{D}_\varphi^\beta\left[S(s,\varphi)^{-\frac{1}{p}}\right]ds+$$

$$+\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{|\gamma|+|\nu|=|\beta|-1}C_{m,\gamma,\nu}\,\mathcal{D}_\varphi^\gamma\left[\left(\mathcal{D}_\varphi^\nu S(s,\varphi)^{-\frac{1}{p}}\right)\Big|_{s=\tau_0(\varphi)}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi_m}\tau_0(\varphi)\right],$$

$C_{m,\gamma,\nu}$ - некоторые константы. Используя оценки (I.58) и(I.59), получаем отсюда, что

$$\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}}}{\partial\varphi_1^{\alpha_1}\dots\partial\varphi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}H(\tau,\varphi)\right|\leqslant C\,|\tau_0(\varphi)|^{-\left(\frac{2}{p}+|\alpha|-1\right)}.$$

Выразим теперь производные функции $\tau(t,\varphi)$ из соотношения (I.49) через производные функции $H(\tau,\varphi)$ и оценим их, используя неравенства (I.60) и (I.6I).

Для этого заметим, что по индукции можно доказать

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\mathcal{D}_\varphi^\alpha H(\tau(t,\varphi),\varphi)=H'_\tau\mathcal{D}_\varphi^\alpha\tau+$$

$$+\sum_{m=0}^{k+|\alpha|}\sum_{\substack{|\beta|+|\nu^1|+\dots+|\nu^m|=k+|\alpha|\\ 1\leqslant|\nu^i|\leqslant k+|\alpha|-1\\ \nu_0^1+\nu_0^2+\dots+\nu_0^k\geqslant k}}C_{m,\nu^1,\dots,\nu^m}\frac{\partial^m}{\partial t^m}\mathcal{D}_\varphi^\beta H\cdot\mathcal{D}_{t,\varphi}^{\nu^1}\tau\cdot\dots\cdot\mathcal{D}_{t,\varphi}^{\nu^m}\tau,$$

где $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_{n-1})$, $\nu^i=(\nu_0^i,\nu_1^i,\dots,\nu_{n-1}^i)$, $k+|\alpha|\geqslant 1$, $C_{m,\nu^1,\dots,\nu^m}$ - некоторые константы.

Поэтому, дифференцируя обе части соотношения (I.49) и учитывая оценки (I.60) и(I.6I), получаем последовательно:

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k} D_\varphi^\alpha z(t,\varphi)\right| \leq C\,|z|^{1-(k+|\alpha|)\frac{p-2}{p}} |z_0(\varphi)|^{-|\alpha|\frac{2}{p}}, \quad k+|\alpha| \leq m. \tag{1.62}$$

Для завершения доказательства леммы заметим, что

$$\lim_{t\to b(\varphi)-0} \frac{z(t,\varphi)}{(b(\varphi)-t)^{p/p-2}} = \lim_{t\to b(\varphi)-0} z(t,\varphi)\Big(\int_0^z S(s,\varphi)^{-\frac{1}{p}} ds\Big)^{-p/p-2} =$$

$$= \lim_{z\to 0} z\Big(\int_0^z S(s,\varphi)^{-\frac{1}{p}} ds\Big)^{-p/p-2} = \Big(\frac{p-2}{p}\Big)^{p/p-2}\left[S''_{ss}(0,\varphi)\right]^{1/p-2} \neq 0,$$

то есть

$$|z(t,\varphi)| = O\left((b(\varphi)-t)^{p/p-2}\right) \qquad \text{при } t \to b(\varphi)-0$$

и, значит,

$$|z(t,\varphi)| \leq C\,(b(\varphi)-t)^{p/p-2} \qquad \text{в } \Omega. \tag{1.63}$$

Из неравенств (I.62) - (I.63) теперь вытекают требуемые оценки.

Лемма I.5 доказана.

Следствие I.I. Пусть $z(t,\varphi)$ - решение задачи (I.43)-(I.44). Тогда функция $z(t,\varphi) \in W_p^1(R^+\times\Phi)$.

Как уже было отмечено в замечании I.4, функция $z(t,\varphi)$ не является, вообще говоря, классическим решением задачи (I.43)-(I.44). Однако, справедливо следующее усиление леммы I.4.

Лемма I.6. Пусть в условиях леммы I.4 $\delta(\varphi), z_0(\varphi) \in C^2(\Phi)$, $g(z,\varphi) \in C^2(R^1\times\Phi)$. Тогда решение $z(t,\varphi)$ задачи (I.43)-(I.44) таково, что функция $\Lambda_p\Big(\frac{\partial z(t,\varphi)}{\partial t}\Big) \in C^1(R^+\times\Phi)$ и выполнено равенство (I.43).

Доказательство.

Согласно лемме I.5, $z(t,\varphi) \in C(R^+\times\Phi) \cap C^2(R^+\times\Phi\setminus\mathcal{M})$.

Поэтому $\Lambda_p\Big(\frac{\partial z(t,\varphi)}{\partial t}\Big) \in C^1(\Omega)$ и в области Ω:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_p\left(\frac{\partial z(t,\varphi)}{\partial t}\right)=(p-1)\left|\frac{\partial z(t,\varphi)}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial^2 z(t,\varphi)}{\partial t^2}=g(z,\varphi)\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\Lambda_p\left(\frac{\partial z(t,\varphi)}{\partial t}\right)=(p-1)\left|\frac{\partial z(t,\varphi)}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial^2 z(t,\varphi)}{\partial t\,\partial \varphi_j}\ .$$

Так как $g(0,\varphi)=0$ и из оценок (I.62) вытекает, что $\left|\frac{\partial z}{\partial t}\right|\leqslant C z^{\frac{2}{p}}$ и $\left|\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial\varphi_j}\right|\leqslant C^{\frac{2}{p}-1}$, то из написанных равенств следует:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_p\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\Big|_{\mathcal{M}}=0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi_j}\Lambda_p\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\Big|_{\mathcal{M}}=0\ .$$

Поскольку $\Lambda_p\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\equiv 0$ в $R^+\times\Phi\setminus\Omega$, то отсюда имеем: $\Lambda_p\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\in C^1(R^+\times\Phi)$.

Тем самым лемма I.6 доказана.

2. Рассмотрим теперь задачу для определения погранслоя $v(t,\varphi)$:

$$\begin{cases} -\delta(\varphi)\dfrac{d^m}{dt^m}\Lambda_p\left(\dfrac{d^m v}{dt^m}\right)+\dfrac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}g\left(\dfrac{d^{m-1}v}{dt^{m-1}},\varphi\right)=0, & (1.64)\\[2ex] \dfrac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}v(t,\varphi)\Big|_{t=0}=z_0(\varphi),\quad \lim\limits_{t\to+\infty}v(t,\varphi)=0\ . & (1.65)\end{cases}$$

Пусть $\varphi\in\Phi$ фиксировано. Мы скажем, что функция $v(t,\varphi)\in W_p^m(R^1)$ является решением задачи (I.64)-(I.65), если для любой функции $z(t)\in \overset{\circ}{W}{}_p^m(R^+)$ имеет место равенство:

$$\delta(\varphi)\int_0^\infty\Lambda_p\left(\frac{d^m v}{dt^m}\right)\frac{d^m z}{dt^m}\,dt+\int_0^\infty g\left(\frac{d^{m-1}v}{dt^{m-1}},\varphi\right)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}z\,dt=0$$

и выполнено условие (I.65).

<u>Теорема I.2.</u> Пусть $\delta(\varphi), z_0(\varphi)\in C^m(\Phi)$; $g(z,\varphi)\in C^m(R^1\times\Phi)$, причем $\delta(\varphi)\geqslant\gamma^2>0$ и $g'_z(z,\varphi)\geqslant\gamma^2>0$.

Тогда при любом фиксированном $\varphi\in\Phi$ задача (I.64)-(I.65)

имеет единственное решение $v(t,\varphi)$ в классе $W_p^m(R^+)$ такое, что $\operatorname{supp}_t v(t,\varphi) = [0, b(\varphi)]$, где $b(\varphi)$ определена равенством (I.50).

Как функция n переменных $(t, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ функция $v(t,\varphi)$ такова, что $v(t,\varphi) \in C^{\varkappa}(R^+ \times \Phi) \cap C^m(R^+ \times \Phi \setminus \mathcal{M})$ при $\varkappa < m-(m-1)\frac{2}{p}$ и

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} D_\varphi^\alpha v(t,\varphi) \right| \leq C \left| \tau_0(\varphi) \right|^\nu, \tag{1.66}$$

где $\nu = \frac{2}{p} + \frac{p-2}{p}(m-k) - |\alpha|$,

для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, $k + |\alpha| \leq m$, $(t,\varphi) \in \Omega$. (Множества $\mathcal{M}$ и Ω определены равенствами (I.54).)

Кроме того, функция $\Lambda_p\left(\frac{\partial^m v(t,\varphi)}{\partial t^m}\right) \in C^1(R^+ \times \Phi)$ и имеет место равенство:

$$-\delta(\varphi)\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_p\left(\frac{\partial^m v(t,\varphi)}{\partial t^m}\right) + g\left(\frac{\partial^{m-1} v(t,\varphi)}{\partial t^{m-1}}, \varphi\right) - g(0,\varphi) = 0. \tag{1.67}$$

<u>Доказательство.</u>

Единственность. Положим для фиксированного $\varphi \in \Phi$: $\tau(t,\varphi) = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} v(t,\varphi)$. Тогда $\tau(t,\varphi) \in W_p^1(R^+)$ и, в силу равенства (I.64), имеем:

$$-\delta(\varphi)\frac{d}{dt}\Lambda_p\left(\frac{d\tau}{dt}\right) = g(\tau,\varphi) + c_0 + c_1 t + \dots + c_{m-2} t^{m-2} \equiv \tilde{g}(\tau,\varphi;t).$$

Поскольку $\tau(t,\varphi) \in W_p^1(R^+)$, то для любой функции $z(t) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(R^+)$:

$$\int_0^\infty \tilde{g}(\tau,\varphi;t)\, z\, dt = -\delta(\varphi)\int_0^\infty \Lambda_p\left(\frac{d\tau}{dt}\right)\frac{dz}{dt}\, dt < +\infty. \tag{1.68}$$

Покажем, что это условие может выполняться лишь в случае $\tilde{g}(\tau,\varphi;t) \equiv g(\tau,\varphi) - g(0,\varphi)$.

Пусть $\tilde{g}(z,\varphi;t) \not\equiv g(z,\varphi) - g(0,\varphi)$, тогда найдутся числа $h>0$, $R>0$ и $T=T(h)<\infty$ такие, что $|\tilde{g}(z,\varphi;t)| \geq h$ при $|z| \leq R$, $t \geq T(h)$.

Обозначим $A = \{t \in R^+ : |z(t,\varphi)| > h\}$. Мера множества A конечна, так как $z(t,\varphi) \in W_p^1(R^+)$.

Рассмотрим функцию

$$z(t) = \begin{cases} t & \text{для } 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{t} & \text{для } t > 1, \end{cases}$$

тогда $z(t) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(R^+)$ и согласно условию (I.68) функция $\tilde{g}(z,\varphi;t)\,z(t)$ интегрируема по Лебегу на R^+, а значит интегрируема на $R^+ \setminus A$. Но

$$\int_{R^+\setminus A} |\tilde{g}(z,\varphi;t)|\, z(t)\,dt \geq h \int_{R^+\setminus A} z(t)\,dt,$$

а

$$\int_{R^+\setminus A} z(t)\,dt = \int_{R^+} z(t)\,dt - \int_A z(t)\,dt = +\infty.$$

Полученное противоречие показывает, что $\tilde{g}(z,\varphi;t) \equiv g(z,\varphi) - g(0,\varphi)$, а следовательно, функция $z(t,\varphi)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} -\delta(\varphi)\frac{d}{dt}\Lambda_p\left(\frac{dz}{dt}\right) + g(z,\varphi) - g(0,\varphi) = 0 & (1.69) \\ z(0,\varphi) = z_0(\varphi), \quad z(t,\varphi) \in W_p^1(R^+). & (1.70) \end{cases}$$

При доказательстве леммы I.4 было показано, что эта задача имеет единственное решение. Поэтому, если $v(t,\varphi)$ и $\tilde{v}(t,\varphi)$ - два решения задачи (I.64)-(I.65), то $\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}(v(t,\varphi) - \tilde{v}(t,\varphi)) = 0$

и, так как $v(t,\varphi) - \tilde{v}(t,\varphi) \in W_p^m(R^+)$, то отсюда следует, что $v(t,\varphi) \equiv \tilde{v}(t,\varphi)$.

Существование. Пусть $z(t,\varphi)$ - решение задачи (I.69)-(I.70), которое существует, в силу леммы I.4, и обладает свойствами, указанными в условиях леммы I.4, I.5 и I.6.

Определим функцию $v(t,\varphi)$ равенством:

$$v(t,\varphi)=(-1)^{m-1}\int\limits_t^\infty\int\limits_{\tau_{m-1}}^\infty\cdots\int\limits_{\tau_3}^\infty\int\limits_{\tau_2}^\infty z(\tau_1,\varphi)\,d\tau_1\,d\tau_2\cdots d\tau_{m-1}=$$

$$=\begin{cases}(-1)^{m-1}\int\limits_t^{b(\varphi)}\int\limits_{\tau_{m-1}}^{b(\varphi)}\cdots\int\limits_{\tau_2}^{b(\varphi)} z(\tau_1,\varphi)\,d\tau_1\cdots d\tau_{m-1} & \text{при } (t,\varphi)\in\Omega,\\ 0 \quad \text{в} \quad R^+\times\Phi\setminus\Omega. & \end{cases}$$

Тогда функция $v(t,\varphi)$ является решением задачи (I.64)-(I.65), $\operatorname{supp}_t v(t,\varphi)=[0,b(\varphi)]$, причем, в силу леммы I.6,

$$\Lambda_p\left(\frac{\partial^m v(t,\varphi)}{\partial t^m}\right)=\Lambda_p\left(\frac{\partial z(t,\varphi)}{\partial t}\right)\in C^1(R^+\times\Phi)$$

и выполнено равенство (I.67).

Далее имеем:

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}D_\varphi^\alpha v(t,\varphi)=(-1)^{m-1-k}\int\limits_t^\infty\int\limits_{\tau_{m-1-k}}^\infty\cdots\int\limits_{\tau_2}^\infty z(\tau_1,\varphi)\,d\tau_1\cdots d\tau_{m-1-k},$$

то есть, в силу оценок (I.62):

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}D_\varphi^\alpha v(t,\varphi)\right|\leqslant C\,(b(\varphi)-t)^{m-1-k}\,|z(t,\varphi)|^{1-|\alpha|\frac{p-2}{2}}\,|z_0(\varphi)|^{-|\alpha|\frac{2}{p}}$$

при $k+|\alpha|\leqslant m$, $(t,\varphi)\in\Omega$.

Учитывая, что $|z(t,\varphi)|\leqslant|z_0(\varphi)|$ и имеет место оценка (I.63), получаем, что

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}D_\varphi^\alpha v(t,\varphi)\right|\leqslant C\,(b(\varphi)-t)^{m-1-k+(1-|\alpha|)\frac{p}{p-2}} \tag{1.71}$$

и

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}D_\varphi^\alpha v(t,\varphi)\right|\leqslant C\,(b(\varphi)-t)^{m-1-k}\,|z(t,\varphi)|^{1-|\alpha|\frac{p-2}{p}}\,|z_0(\varphi)|^{-|\alpha|\frac{2}{p}}. \tag{1.72}$$

Поскольку $B(\varphi) \leq C\,|\tau_0(\varphi)|^{\frac{p-2}{p}}$, из неравенства (I.72) сразу получаем оценку (I.66).

Из оценки I.7I следует, что $\frac{\partial^k}{\partial t^k} D_\varphi^\alpha v(t,\varphi) \in C(R^+ \times \Phi)$ при $m-1-k+(1-|\alpha|)\frac{p}{2-p} > 0$, то есть при $k+|\alpha| < m-(m-1-k)\frac{2}{p}$. В частности, $v(t,\varphi) \in C^{\varkappa}(R^+ \times \Phi)$ при $\varkappa < m-(m-1)\frac{2}{p}$.

Теорема I.2 доказана.

Следствие I.2. Пусть в условиях теоремы I.2 функция $\tau_0(\varphi) \neq 0$. Тогда решение $v(t,\varphi)$ задачи (I.64)-(I.65) принадлежит классу $C^m(R^+ \times \Phi) \cap W_p^m(R^+ \times \Phi)$.

§ 5. Оценка погрешности при замене точного решения нелинейной краевой задачи главным членом его асимптотики

I. Приступим к построению главного члена асимптотики решения $u_\varepsilon(x)$ исходной задачи (I.I)-(I.2).

Пусть $u_0(x) \equiv h(x) \in C^m(G)$ - решение вырожденной задачи (I.I2).

Если Γ_s^k - некоторая окрестность с локальными координатами (ρ, φ^k), введенная в § 3, то мы можем, согласно теореме I.2, определить в этой окрестности функцию $v^k(t,\varphi^k)$ как решение задачи

$$L_0(v) = 0, \tag{1.73}$$

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} v\Big|_{t=0} = \tau_0(\varphi) \equiv \frac{\partial^{m-1}}{\partial \vec{n}^{m-1}} h\Big|_\Gamma, \quad \lim_{t\to+\infty} v(t,\varphi) = 0. \tag{1.74}$$

Здесь $L_0(v)$ - определено формулой (I.38) в координатах (t,φ^k) окрестности Γ_s^k. (Напомним, что $t=\frac{1}{\varepsilon}\rho$).

Перейдя на множестве $\Gamma_s^k \cap \Gamma_s^\ell$ в задаче (I.73)-(I.74) к координатам (t,φ^ℓ), мы получим задачу, решением которой служит функция $v^\ell(t,\varphi^\ell)$. В силу единственности решение задачи (I.73)-(I.74) функции $v^k(t,\varphi^k)$ и $v^\ell(t,\varphi^\ell)$ совпадают на $\Gamma_s^k \cap \Gamma_s^\ell$. Это позволяет корректно определить функцию $u(\varepsilon,x)$ на многообразии $\Gamma_s = \bigcup_{k=1}^{N} \Gamma_s^k$, совпадающую с функцией $v^k(\frac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi^k)$ на Γ_s^k.

Однако, как показывает пример I.2, функции $v^k(\frac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi^k)$ не принадлежат, вообще говоря, пространству $W_p^m(\Gamma_s^k)$. Поэтому, для того, чтобы погранслойная поправка $u(\varepsilon,x)$ принадлежала при каждом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ пространству $W_p^m(G)$, мы исправим функцию $\tilde{u}(\varepsilon,x)$ в окрестности тех точек, где теряется гладкость.

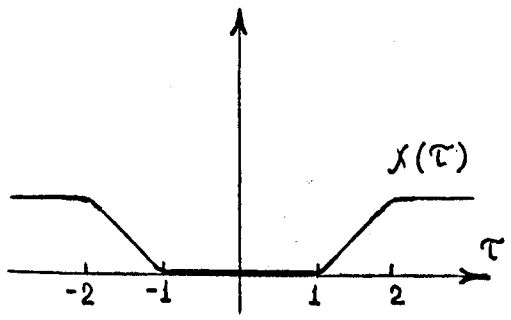

рис. 3

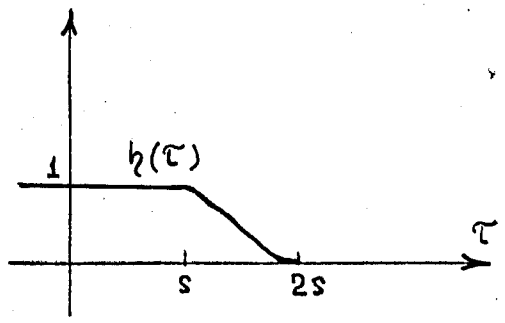

рис. 4

Пусть ε_0 выбрано так, что $\varepsilon_0 b_0 < s$. Пусть $\chi(\tau)$ и $\eta(\tau)$ функции класса $C^\infty(R^1)$ такие, что (см. рис. 3, 4) $\chi(\tau)=0$ при $|\tau|\leq 1$, $\chi(\tau)=1$ при $|\tau|\geq 2$, $0\leq\chi(\tau)\leq 1$; $\eta(\tau)=1$ при $\tau\leq s$, $\eta(\tau)=0$ при $\tau\geq 2s$.

Определим погранслой $U(\varepsilon,x)$ по формуле:

$$U(\varepsilon,x)=\begin{cases}\chi(\frac{1}{\varepsilon}\tau_0(\varphi^K))v^K(\frac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi^K)+[1-\chi(\frac{1}{\varepsilon}\tau_0(\varphi^K))]h(\frac{1}{\varepsilon}\rho)\tau_0(\varphi^K) & \text{в } \Gamma_{2s}^K, \\ 0 & \text{в } G\setminus\bigcup\limits_{K=1}^{N}\Gamma_{2s}^K.\end{cases} \tag{1.75}$$

В частности, если $\tau_0(\varphi)$ не обращается в нуль, то есть, согласно следствию I.2, функция $v^K(\frac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi^K)\in C^m(\Gamma_s^K)$, то функция $U(\varepsilon,x)$ совпадает с $\tilde{U}(\varepsilon,x)=v^K(\frac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi^K)$ на Γ_s^K.

Построенная функция $U(\varepsilon,x)$ для любого $\varepsilon>0$ принадлежит классу $C^m(\bar{G})\subset W_p^m(G)$ и удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial\vec{n}^{m-1}}(h(x)+\varepsilon^{m-1}U(\varepsilon,x))\Big|_\Gamma=0.$$

Замечание I.5. В отличие от линейного случая (см. [7]), где погранслой экспоненциально убывает во внутренних точках G при $\varepsilon\to 0^+$, здесь функция $U(\varepsilon,x)$ тождественно равна нулю при $\rho(x)\geq\varepsilon\beta(\varphi(x))$. В частности, $\mathrm{mes}(\mathrm{supp}_x U(\varepsilon,x))\leq C\varepsilon$.

Далее мы введем функцию $\Psi(\varepsilon,x)$ так, чтобы выполнялись условия (I.32). Для этого, в окрестности Γ_s^K мы определим $\Psi(\varepsilon,x)$ как полином

$$\Psi(\varepsilon,x)=\varepsilon^{m-2}\sum_{i=0}^{m-2}a_i(\varphi^K)t^i\equiv\sum_{i=0}^{m-2}\varepsilon^{m-2-i}a_i(\varphi^K)\rho^i,$$

где коэффициенты $a_i(\varphi^K)$ выбраны так, чтобы выполнялись условия (I.32). При этом функция $\Psi(\varepsilon,x)$ будет равномерно по $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $x\in\Gamma_s^K$ ограничена вместе с производными по x до порядка m включительно.

Итак, пусть

$$\Psi(\varepsilon,x)=\begin{cases} -\left[\sum\limits_{i=0}^{m-2}\varepsilon^{m-2-i}\left(\frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial t^i}v^k(t,\varphi^k)\Big|_{t=0}\right)\rho^i\right]\eta(\rho) & \text{в } \Gamma_{2s}^k, \\ 0 & \text{в } G\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{N}\Gamma_{2s}^k, \end{cases} \tag{1.76}$$

где срезающая функция $\eta(\tau)$ определена выше.

Положим теперь

$$\tilde{u}_\varepsilon(x)=h(x)+\varepsilon^{m-1}u(\varepsilon,x)+\varepsilon\Psi(\varepsilon,x), \tag{1.77}$$

где $u(\varepsilon,x)$ и $\Psi(\varepsilon,x)$ определены по формулам (I.75) и (I.76) соответственно. Тогда $\tilde{u}_\varepsilon(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^m(G)$ при каждом $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Мы покажем далее, что

$$\|\varepsilon\Psi(\varepsilon,x)\|_{W_p^m(G)}=\mathcal{O}(\varepsilon),\quad \|\varepsilon\Psi(\varepsilon,x)\|_{W_q^{m-1}(G)}=\mathcal{O}(\varepsilon); \tag{1.78}$$

$$\|\varepsilon^{m-1}u(\varepsilon,x)\|_{W_p^m(G)}=\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}),\quad \|\varepsilon^{m-1}u(\varepsilon,x)\|_{W_q^{m-1}(G)}=\mathcal{O}(\varepsilon^{1/q}), \tag{1.79}$$

а также, что

$$\|u_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{W_p^m(G)}\leqslant C\varepsilon^{\frac{\varkappa}{p}+\frac{1-p}{p}},$$

$$\|u_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{W_q^{m-1}(G)}\leqslant C\varepsilon^{\frac{\varkappa}{q}+\frac{1}{q}},$$

где $\varkappa=\min\left(1,\frac{\sigma p}{p-1}\right)$.

Из этих оценок будет следовать, что функция $\tilde{u}_\varepsilon(x)$, построенная по формулам (I.75)-(I.77), является главным членом асимптотики решения краевой задачи (I.I)-(I.2).

Лемма I.7. Пусть функции $\Psi(\varepsilon,x)$ и $u(\varepsilon,x)$ определены формулами (I.76) и (I.75) соответственно. Тогда имеют место соотношения (I.78) и (I.79).

Доказательство.

Поскольку $\frac{\partial^{m-1}}{\partial\vec{n}^{m-1}}h\big|_\Gamma\not\equiv 0$, то в некоторой окрестности

Γ_s^K имеем $z_0(\varphi^K) \not\equiv 0$. Отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial^{m-2} v^K}{\partial t^{m-2}}\Big|_{t=0} = -\int_0^\infty z(\tau,\varphi^K)\,d\tau \not\equiv 0,$$

то есть

$$\Big\|\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} v^K(t,\varphi^K)\Big|_{t=0}\rho^{m-2}\eta(\rho)\Big\|_{W_p^m(\Gamma_{2s}^K)} = \mathrm{const} \neq 0.$$

Так как

$$\Big\|\varepsilon^{m-2-i}\frac{\partial^i}{\partial t^i} v^K(t,\varphi^K)\Big|_{t=0}\cdot\rho^i\eta(\rho)\Big\|_{W_p^m(\Gamma_{2s}^K)} \leqslant C\varepsilon$$

при $i<m-2$, то это влечет первое из соотношений (I.78). Доказательство второго из соотношений (I.78) аналогично.

Обозначим для краткости

$$f^K(\varepsilon,\rho,\varphi^K) \equiv \chi\Big(\frac{z_0(\varphi^K)}{\varepsilon}\Big)v^K\Big(\frac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi^K\Big)+\Big[1-\chi\Big(\frac{z_0(\varphi^K)}{\varepsilon}\Big)\Big]\eta\Big(\frac{1}{\varepsilon}\rho\Big)z_0(\varphi^K),$$

тогда для $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$ имеем:

$$\Big|\frac{\partial^\ell}{\partial\rho^\ell}D_\varphi^\alpha f^K(\varepsilon,\rho,\varphi^K)\Big| \leqslant C\varepsilon^{-\ell}.$$

Поэтому для целого числа $\ell>0$ и вещественного числа $r>1$ справедливо неравенство:

$$\Big|\sum_{|\alpha|\leqslant\ell}\Big\|\frac{\partial^{\alpha_0}}{\partial\rho^{\alpha_0}}D_\varphi^\alpha f^K(\varepsilon,\rho,\varphi^K)\Big\|^r_{L_r(\Gamma_{2s}^K)}-\Big\|\frac{\partial^\ell}{\partial\rho^\ell}f^K(\varepsilon,\rho,\varphi^K)\Big\|^r_{L_r(\Gamma_{2s}^K)}\leqslant$$
$$\leqslant C\varepsilon^{r(1-\ell)}. \qquad (1.80)$$

При этом

$$\frac{\partial^\ell}{\partial\rho^\ell}\Big[\chi\Big(\frac{z_0(\varphi^K)}{\varepsilon}\Big)v^K\Big(\frac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi^K\Big)\Big] = \varepsilon^{-\ell}\chi\Big(\frac{z_0(\varphi^K)}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}v^K(t,\varphi^K)$$

и, так как функции $\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}v^K(t,\varphi^K)=z(t,\varphi^K)$ и $\frac{\partial^m}{\partial t^m}v^K(t,\varphi^K)=\frac{\partial}{\partial t}z(t,\varphi^K)$ в некоторой окрестности Γ_{2s}^K

не обращаются в нуль тождественно и сосредоточены на множестве меры $\mathcal{O}(\varepsilon)$, то для $\ell = m, m-1$ имеем:

$$\left\| \frac{\partial^\ell}{\partial \rho^\ell} \chi\left(\frac{z_0(\varphi^k)}{\varepsilon}\right) v^k\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho, \varphi^k\right) \right\|^r_{L_r(\Gamma^k_{2s})} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1-r\ell}).$$

Далее, так как $\left[1-\chi\left(\frac{z_0(\varphi^k)}{\varepsilon}\right)\right] = 0$ для $|z_0(\varphi^k)| \geq 2\varepsilon$,

то

$$\left| \frac{\partial^\ell}{\partial \rho^\ell} \left[1-\chi\left(\frac{z_0(\varphi^k)}{\varepsilon}\right)\right] \eta\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho\right) z_0(\varphi^k) \right| \leq C\varepsilon^{1-\ell}.$$

Из оценки (I.80) получаем теперь при $\ell = m$, $r = p$ и $\ell = m-1$, $r = q$ соотношения (I.79).

Лемма I.7 доказана.

2. Докажем, наконец, теорему об оценке погрешности при замене решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (I.I)-(I.2) построенной выше функцией $\tilde{u}_\varepsilon(x)$.

<u>Теорема I.3.</u> Пусть $u_\varepsilon(x)$ - решение задачи (I.I)-(I.2), а $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ - функция, построенная по формулам (I.75)-(I.77). Тогда

$$\| u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x) \|_{W^m_p(G)} \leq C\varepsilon^{\frac{\varkappa}{p} + \frac{1-p}{p}}, \tag{1.81}$$

$$\| u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x) \|_{W^{m-1}_q(G)} \leq C\varepsilon^{\frac{\varkappa}{q} + \frac{1}{q}}, \tag{1.82}$$

где $\varkappa = \min\left(1, \frac{\sigma p}{p-1}\right)$, σ - константа, фигурирующая в условии (I.6); константы C не зависят от ε.

<u>Доказательство.</u>

Пусть T^ε_{2m} оператор из $\overset{\circ}{W}{}^m_p(G)$ в $W^{-m}_{p/p-1}(G)$, определенный в § 2. Обозначая $z(\varepsilon, x) = u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x)$, получим:

$$\langle T^\varepsilon_{2m}(u_\varepsilon) - T^\varepsilon_{2m}(\tilde{u}_\varepsilon), u - \tilde{u}_\varepsilon \rangle = \langle -T^\varepsilon_{2m}(\tilde{u}_\varepsilon), z \rangle.$$

Мы покажем, что справедлива оценка:

$$|\langle T_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon), z\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant C\varepsilon^{1+\varkappa} + \frac{1}{2}\varepsilon P\gamma_2^2 \|z\|^p_{W_p^m(G)} + \frac{1}{2}\gamma_3^2 \|z\|^2_{W_2^{m-1}(G)} \quad . \tag{1.83}$$

Тогда из неравенства (I.I4) будут немедленно следовать требуемые оценки (I.8I) и (I.82).

Оценим последовательно интегралы, входящие в левую часть соотношения (I.83) согласно определению оператора T^ε_{2m}.

Рассмотрим сначала область $\Omega_1 = G \setminus \operatorname{supp}_x U(\varepsilon, x)$. В ней $\tilde{u}_\varepsilon(x) = h(x) + \varepsilon\Psi(\varepsilon, x)$, то есть $|\mathcal{D}^\alpha \tilde{u}_\varepsilon(x)| \leqslant C$ для $|\alpha| \leqslant m$ и, значит,

$$|A_\alpha(x, \delta\tilde{u}_\varepsilon, \mathcal{D}^m \tilde{u}_\varepsilon| \leqslant C, \qquad |B_\alpha(x, \delta\tilde{u}_\varepsilon) - B_\alpha(x, \delta h)| \leqslant C\varepsilon$$

в Ω_1.

Поэтому, используя неравенство Юнга

$$aB \leqslant C(\gamma)a^{\tau/\tau-1} + \gamma B^\tau; \quad a, B > 0; \quad \tau > 1; \quad \gamma > 0,$$

получаем, что

$$\left|\varepsilon^p \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_{\Omega_1} A_\alpha(x, \delta\tilde{u}_\varepsilon, \mathcal{D}^m \tilde{u}_\varepsilon)\mathcal{D}^\alpha z\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\varepsilon^p + \frac{1}{2}\gamma_2^2\varepsilon^p \|z\|^p_{W_p^m(\Omega_1)}, \tag{1.84}$$

$$\left|\sum_{|\alpha|\leqslant m-1} \int_{\Omega_1} \left[B_\alpha(x, \delta\tilde{u}_\varepsilon) - B_\alpha(x, \delta h)\right]\mathcal{D}^\alpha z\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\gamma_3^2 \|z\|^2_{W_2^{m-1}(\Omega_1)} \quad . \tag{1.85}$$

Далее рассмотрим множество точек $\Omega_2 = \{x \in \operatorname{supp}_x U(\varepsilon, x) : \tau_0(\varphi^K(x)) \leqslant 2\varepsilon\}$. Так как $\tau_0(\varphi^K) \leqslant 2\varepsilon$ для $x \in \Omega_2$, то при $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ имеем:

$$\left|\mathcal{D}^\alpha_{\rho,\varphi}\left\{\left[1 - \chi\left(\frac{\tau_0(\varphi^K)}{\varepsilon}\right)\right]\eta\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho\right)\tau_0(\varphi^K)\right\}\right| \leqslant C\varepsilon^{1-\ell}$$

для $|\alpha| \leqslant \ell$.

Функция $\chi\left(\frac{\tau_0(\varphi^K)}{\varepsilon}\right)$ обращается в нуль при $\tau_0(\varphi^K) \leqslant \varepsilon$, а для $\tau_0(\varphi^K) \geqslant \varepsilon$ из оценок (I.66) следует, что

$$\left|\mathcal{D}^{\alpha}_{\rho,\varphi} v^K\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\rho, \varphi^K\right)\right| \leqslant C\varepsilon^{\nu_1}, \qquad \text{где } \nu_1 = \frac{\tau}{p} + \frac{p-2}{p}(m-\alpha_0) - |\alpha|$$

и, значит,

$$\left|\mathcal{D}^{\alpha}_{\rho,\varphi} \chi\left(\frac{\tau_0(\varphi^K)}{\varepsilon}\right) v^K\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\rho, \varphi^K\right)\right| \leqslant C\varepsilon^{\nu_1}$$

с тем же ν_1.

Отсюда следует, что на множестве Ω_2 верны оценки:

$$\left|\mathcal{D}^{\beta}_{x}\, \varepsilon^{m-1} u(\varepsilon, x)\right| \leqslant C\varepsilon \qquad \text{при } |\beta| \leqslant m-1$$

и

$$\left|\mathcal{D}^{\beta}_{x}\, \varepsilon^{m-1} u(\varepsilon, x)\right| \leqslant C\varepsilon^{\frac{2}{p}-1}, \qquad \text{при } |\beta| \leqslant m,$$

то есть

$$\left|A_\alpha(x, \delta\tilde{u}_\varepsilon, \mathcal{D}^m \tilde{u}_\varepsilon)\right| \leqslant C\varepsilon^{\left(\frac{2}{p}-1\right)(p-1)}, \quad \left|B_\alpha(x, \delta\tilde{u}_\varepsilon) - B_\alpha(x, \delta h)\right| \leqslant C\varepsilon.$$

Поэтому, аналогично (I.84) и (I.85) получаем:

$$\left|\varepsilon^p \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_{\Omega_2} A_\alpha(x, \delta\tilde{u}_\varepsilon, \mathcal{D}^m \tilde{u}_\varepsilon)\mathcal{D}^\alpha z\, dx\right| \leqslant \\ \leqslant C\varepsilon^3 + \tfrac{1}{4}\gamma_2^2 \varepsilon^p \|z\|^p_{W^m_p(\Omega_2)}, \tag{1.86}$$

$$\left|\sum_{|\alpha|\leqslant m-1} \int_{\Omega_2} \left[B_\alpha(x, \delta\tilde{u}_\varepsilon) - B_\alpha(x, \delta h)\right]\mathcal{D}^\alpha z\, dx\right| \leqslant \\ \leqslant C\varepsilon^3 + \tfrac{1}{4}\gamma_3^2 \|z\|^2_{W^{m-1}_2(\Omega_2)}, \tag{1.87}$$

где учтено, что $\operatorname{mes} \Omega_2 \leqslant C\varepsilon$.

Рассмотрим теперь множество $\Omega_3 = \operatorname{supp}_x u(\varepsilon, x) \setminus \Omega_2$. Заметим, что $\operatorname{mes} \Omega_3 \leqslant C\varepsilon$, и на множестве $\Omega_3 \cap \Gamma_s^K$ функция $u(\varepsilon, x)$ совпадает с функцией $v^K\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho, \varphi^K\right)$. Поэтому $\left|\mathcal{D}^\alpha_x \tilde{u}_\varepsilon\right| \leqslant C$ при $|\alpha| \leqslant m-1$, $\left|\mathcal{D}^\alpha_x \tilde{u}_\varepsilon\right| \leqslant \frac{C}{\varepsilon}$ при $|\alpha| = m$, и из условий (I.3), (I.5), (I.6) вытекает, что

$$\left|\varepsilon^p \tilde{A}_\alpha(x, \delta\tilde{u}_\varepsilon, \mathcal{D}^m \tilde{u}_\varepsilon)\right| \leqslant C\varepsilon^{1+\sigma} \qquad \text{при } |\alpha| = m,$$

$$\left|\varepsilon^p A_\alpha(x, \delta\tilde{u}_\varepsilon, \mathcal{D}^m \tilde{u}_\varepsilon)\right| \leqslant C\varepsilon \qquad \text{при } |\alpha| \leqslant m-1.$$

То есть, справедлива оценка

$$\left| \varepsilon^p \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega_3} \tilde{A}_\alpha(x, \delta\tilde{u}_\varepsilon, \mathcal{D}^m \tilde{u}_\varepsilon) \mathcal{D}^\alpha z \, dx + \varepsilon^p \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \int_{\Omega_3} A_\alpha(x, \delta\tilde{u}_\varepsilon, \mathcal{D}^m \tilde{u}_\varepsilon) \mathcal{D}^\alpha z \, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^{1+\varkappa} + \gamma \varepsilon^p \|z\|^p_{W^m_p(\Omega_3)} + \gamma \|z\|^2_{W^{m-1}_2(\Omega_3)}, \qquad (1.88)$$

где не зависящая от ε константа $\gamma > 0$ будет выбрана позже.

Пусть $\{\ell_K(\varphi)\}_{K=1}^N$ – разбиение единицы, подчиненное покрытию многообразия Γ системой окрестностей $\{\Gamma^K\}_{K=1}^N$.

Перейдем к координатам (ρ, φ) в интеграле:

$$\varepsilon^p \int_{\Omega_3} \ell_K(\varphi) a_\alpha(x) P_\alpha(\mathcal{D}^m \tilde{u}_\varepsilon) \mathcal{D}^\alpha z \, dx =$$

$$= \varepsilon^p \int_{\Gamma^K_s \cap \Omega_3} \ell_K(\varphi) a_\alpha(x) P_\alpha(\mathcal{D}^m \tilde{u}_\varepsilon) \mathcal{D}^\alpha z \, dx .$$

Повторяя ход доказательства леммы I.2, получим, что при $|\alpha| = m$

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon^p a_\alpha(x) P_\alpha(\mathcal{D}^m \tilde{u}_\varepsilon) = \\ &\quad = \varepsilon a_\alpha(x(0,\varphi)) P_\alpha(\xi^m(0,\varphi)) \Lambda_p\left(\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\right) + \varepsilon^2 R_1(\varepsilon, t, \varphi), \\ &\mathcal{D}^\alpha_x z \Big|_{x = x(\rho,\varphi)} \cdot |J(\rho,\varphi)| = \\ &\quad = |J(0,\varphi)| \, \xi_\alpha(0,\varphi) \frac{\partial^m z}{\partial \rho^m} + \mathcal{M}_1(z) + \mathcal{M}_2(\varepsilon, z). \end{aligned}\right\} \qquad (1.89)$$

Здесь

$$\xi^m(\rho,\varphi) = \{ \xi_\alpha(\rho,\varphi) : |\alpha| = m \},$$

$$\xi_\alpha(\rho,\varphi) = \prod_{i=1}^n C_{0,\alpha_i}(\rho,\varphi);$$

функции $C_{ij}(\rho,\varphi)$ и $J(\rho,\varphi)$ определены равенствами (I.33), (I.34);

$$\mathcal{M}_1(z) = \int_0^{\rho} \frac{\partial}{\partial \tau}\left[|J(\tau,\varphi)| \; \xi_\alpha(\tau,\varphi)\right] d\tau \; \frac{\partial^m z}{\partial \rho^m} \; .$$

Функция $\mathcal{M}_2(\varepsilon,z)$ представляет собой линейную комбинацию производных функции z по переменным $(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$, коэффициенты которой являются равномерно по $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $\rho \in [0,s]$, $\varphi \in \Phi$ ограниченными функциями ε, ρ и φ. При этом в $\mathcal{M}_2(\varepsilon,z)$ входят производные по переменным (ρ,φ) функции z порядка не выше m, а производные порядка m получены не более чем $(m-1)$ -кратным дифференцированием по ρ.

Функция $R_1(\varepsilon,t,\varphi)$, входящая в равенство (I.88), равномерно по $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $\rho \in [0,s]$, $\varphi \in \Phi$ ограничена, то есть

$$\left| \varepsilon^2 \int_{\Omega_3} \ell_K(\varphi) \, R_1(\varepsilon,t,\varphi) \, \mathcal{D}_x^\alpha z \, dx \right| \leqslant \leqslant C\varepsilon^{1+\frac{p}{p-1}} + \gamma \varepsilon^p \int_{\Omega_3} \left| \mathcal{D}_x^\alpha z \right|^p dx \, . \tag{1.90}$$

Так как $\rho \leqslant \varepsilon B_0$ на рассматриваемом множестве Ω_3, то $|\mathcal{M}_1(z)| \leqslant C\varepsilon \left| \frac{\partial^m z}{\partial \rho^m} \right|$ и

$$\left| \int_{\varphi_0^K} \int_0^{\varepsilon B(\varphi)} \varepsilon \ell_K(\varphi) \, a_\alpha(x(0,\varphi)) \, P_\alpha(\xi^m(0,\varphi)) \, \Lambda_p\left(\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\right) \mathcal{M}_1(z) \, d\rho \, d\varphi \right| \leqslant \leqslant C\varepsilon^{1+\frac{p}{p-1}} + \gamma \varepsilon^p \int_{\varphi_0^K} \int_0^{\varepsilon B(\varphi)} \left| \frac{\partial^m z}{\partial \rho^m} \right|^p d\rho \, d\varphi \, , \tag{1.91}$$

где $\varphi_0^K = \{ \varphi \in \Phi^K : \tau_0(\varphi) \geqslant 2\varepsilon \}$.

Для оценки интеграла

$$\int_{\varphi_0^K} \int_0^{\varepsilon B(\varphi)} \varepsilon \ell_K(\varphi) \, a_\alpha(x(0,\varphi)) \, P_\alpha(\xi^m(0,\varphi)) \, \Lambda_p\left(\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\right) \mathcal{M}_2(\varepsilon,z) \, d\rho \, d\varphi$$

воспользуемся тем, что, в силу теоремы I.2, функция

$$\ell_K(\varphi)\, a_\alpha(x(0,\varphi))\, P_\alpha(\xi^m(0,\varphi))\, \Lambda_p\left(\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\right)$$

непрерывно дифференцируема. Так как

$$\Lambda_p\left(\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\right)\Big|_{\rho=\varepsilon B(\varphi)} = 0\,, \qquad \ell_K(\varphi)\Big|_{\partial\varphi^K} = 0$$

и производные функции z до порядка $(m-1)$ включительно обращаются в среднем в нуль при $\rho = 0$, то, снимая с производных функции z порядка m интегрированием по частям одну производную по касательному направлению φ_K, получим, что

$$\left| \int\limits_{\varphi_0^K} \int\limits_0^{\varepsilon B(\varphi)} \varepsilon \ell_K(\varphi)\, a_\alpha(x(0,\varphi))\, P_\alpha(\xi^m(0,\varphi))\, \Lambda_p\left(\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\right) M_2(\varepsilon,z)\, d\rho\, d\varphi \right| \leq$$
$$\leq C\varepsilon^3 + \gamma \|z\|^2_{W_2^{m-1}(\Omega_3)}\,. \tag{1.92}$$

Из соотношений (I.39) и (I.88)-(I.92) получаем теперь, что

$$\varepsilon^p \sum_{|\alpha|\leq m} \int\limits_{\Omega_3} A_\alpha(x, \delta\tilde{u}_\varepsilon, \mathcal{D}^m \tilde{u}_\varepsilon)\, \mathcal{D}^\alpha z\, dx =$$
$$= \sum_{K=1}^{N} \int\limits_{\varphi_0^K} \ell_K(\varphi)\, |J(0,\varphi)| \int\limits_0^{\varepsilon B(\varphi)} \left[-\delta(\varphi)\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_p\left(\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\right)\right] \frac{\partial^{m-1} z}{\partial \rho^{m-1}}\, d\rho\, d\varphi + H_1(\varepsilon)\,, \tag{1.93}$$

где

$$H_1(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{1+\varkappa} + \frac{1}{4}\varepsilon^p \gamma_2^2 \|z\|^p_{W_p^m(\Omega_3)} + \frac{1}{4}\gamma_3^2 \|z\|^2_{W_2^{m-1}(\Omega_3)}$$

при надлежащем выборе γ.

Пусть $\Omega_4 = \Omega_2 \cup \Omega_3 = \operatorname{supp}_x U(\varepsilon, x)$. Рассмотрим

$$\int\limits_{\Omega_4} B_\alpha(x, \delta\tilde{u}_\varepsilon)\, \mathcal{D}^\alpha z\, dx = \int\limits_{\Omega_4} B_\alpha(x, \delta h)\, \mathcal{D}^\alpha z\, dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_4} Q_\alpha\left(\varphi(x), \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}\right) \mathcal{D}^\alpha z\, dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega_4} R_2(\varepsilon, t(x), \varphi(x))\, \mathcal{D}^\alpha z\, dx\,.$$

Здесь

$$Q_\alpha(\varphi,\tau) =$$
$$= \left[B_\alpha(x,h,D^1h,\dots,D^{m-1}h + \tau\xi^{m-1}(0,\varphi)) - B_\alpha(x,\delta h)\right]\Big|_{x=x(0,\varphi)} ,$$

$$\left|\varepsilon R_2(\varepsilon,t,\varphi)\right| = \left|B_\alpha(x,\delta\tilde{u}_\varepsilon) - Q_\alpha(\varphi(x),\frac{\partial^{m-1}v}{\partial t^{m-1}})\right| \leqslant C\varepsilon ,$$

то есть

$$\left|\varepsilon\int\limits_{\Omega_4} R_2(\varepsilon,t(x),\varphi(x))D^\alpha z\,dx\right| \leqslant C\varepsilon^3 + \gamma\int\limits_{\Omega_4}|D^\alpha z|^2\,dx .$$

Воспользуемся тем, что при $|\alpha| = m-1$

$$D_x^\alpha z\Big|_{x=x(\rho,\varphi)}\cdot\left|J(\rho,\varphi)\right| = \left|J(0,\varphi)\right|\xi_\alpha(0,\varphi)\frac{\partial^{m-1}z}{\partial\rho^{m-1}} + \mathcal{M}_3(z) + \mathcal{M}_4(\varepsilon,z) ,$$

где

$$\mathcal{M}_3(z) = \int\limits_0^\rho\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\left|J(\tau,\varphi)\right|\xi_\alpha(\tau,\varphi)\right]d\tau\,\frac{\partial^{m-1}z}{\partial\rho^{m-1}} ,$$

а $\mathcal{M}_4(\varepsilon,z)$ – есть линейная комбинация производных по (ρ,φ) функции z порядка не выше $m-1$, полученных не более чем $(m-2)$ -кратным дифференцированием по ρ.

Аналогично тому, как была получена оценка (I.9I), устанавливаем, что

$$\left|\int\limits_{\varphi^K}\int\limits_0^{\varepsilon B(\varphi)} \ell_K(\varphi)\,Q_\alpha\left(\varphi,\frac{\partial^{m-1}v}{\partial t^{m-1}}\right)\mathcal{M}_3(z)\,d\rho\,d\varphi\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\varepsilon^3 + \gamma\int\limits_{\varphi^K}\int\limits_0^{\varepsilon B(\varphi)}\left|\frac{\partial^{m-1}z}{\partial\rho^{m-1}}\right|^2 d\rho\,d\varphi . \qquad (1.95)$$

Для оценки интеграла

$$\int\limits_{\varphi^K}\int\limits_0^{\varepsilon B(\varphi)} \ell_K(\varphi)\,Q_\alpha\left(\varphi,\frac{\partial^{m-1}v(t,\varphi)}{\partial t^{m-1}}\right)\mathcal{M}_4(\varepsilon,z)\,d\rho\,d\varphi =$$
$$= \int\limits_{\varphi^K}\int\limits_0^{\varepsilon B(\varphi)} \ell_K(\varphi)\frac{\partial}{\partial\rho}\int\limits_0^\rho Q_\alpha\left(\varphi,\frac{\partial^{m-1}v}{\partial t^{m-1}}\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\varphi\right)\right)d\tau\,\mathcal{M}_4(\varepsilon,z)\,d\rho\,d\varphi$$

заметим, что при $\rho = \varepsilon B(\varphi)$ обращается в нуль функция $Q_\alpha\left(\varphi, \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho, \varphi\right)\right)$, при $\rho = 0$ обращаются в нуль в среднем производные функции z до порядка $m-1$ и $\ell_k(\varphi)\big|_{\partial\varphi^k} = 0$.

. Снимая интегрированием по частям с производных функции z одну производную по φ, а затем с функции $\int\limits_0^\rho Q_\alpha\left(\varphi, \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varphi\right)\right) d\tau$ производную по ρ, получим оценку:

$$\left| \int\limits_{\varphi^k} \int\limits_0^{\varepsilon B(\varphi)} \ell_k(\varphi)\, Q_\alpha\left(\varphi, \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}(t, \varphi)\right) \mathcal{M}_4(\varepsilon, z)\, d\rho\, d\varphi \right| \leqslant$$
$$\leqslant C\varepsilon^3 + \gamma \|z\|^2_{W_2^{m-1}(\Omega_4)}. \tag{1.96}$$

Аналогично получается оценка:

$$\left| \int\limits_{\varphi^k} \int\limits_0^{\varepsilon B(\varphi)} \ell_k(\varphi)\, Q_\alpha\left(\varphi, \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}\right) \mathcal{D}^\alpha z \Big|_{x = x(\rho, \varphi)} \cdot |J(\rho, \varphi)|\, d\rho\, d\varphi \right| \leqslant$$
$$\leqslant C\varepsilon^3 + \gamma \|z\|^2_{W_2^{m-1}(\Omega_4)} \tag{1.97}$$

при $|\alpha| < m-1$.

Из соотношений (I.40), (I.94)-(I.97) имеем:

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \int\limits_{\Omega_4} B_\alpha(x, \delta\tilde{u}_\varepsilon) \mathcal{D}^\alpha z\, dx = \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \int\limits_{\Omega_4} B_\alpha(x, \delta h) \mathcal{D}^\alpha z\, dx +$$
$$+ \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\varphi^k} \ell_k(\varphi) |J(0, \varphi)| \int\limits_0^{\varepsilon B(\varphi)} \left[g\left(\frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}, \varphi\right) - g(0, \varphi) \right] \frac{\partial^{m-1} z}{\partial \rho^{m-1}}\, d\rho\, d\varphi + H_2(\varepsilon), \tag{1.98}$$

где

$$|H_2(\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon^3 + \frac{1}{4}\gamma_3^2 \|z\|^2_{W_2^{m-1}(\Omega_4)}$$

при надлежащем выборе γ.

Из соотношений (I.84), (I.85), (I.86), (I.87), (I.88), (I.93) и (I.98), учитывая, что функция $h(x)$ является решением задачи (I.I2), а функция $v(t,\varphi)$ удовлетворяет равенству (I.67), получаем требуемую оценку (I.83).

Тем самым теорема I.3 доказана.

3. В теореме I.3 дана оценка погрешности $z(\varepsilon,x)=u_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)$ в метрике пространств $W_p^m(G)$ и $W_q^{m-1}(G)$. При помощи интерполяции (см., например, [22]) можно получить оценку погрешности в метриках других пространств. Мы ограничимся одним результатом такого типа, опирающимся на доказанную в [23] стр. I45, теорема I0.4, теорему. А именно, мы покажем, что если в условиях теоремы I.3 имеем $\frac{1}{q}-\frac{1}{p}<\frac{m-1}{n}$, и целое число $K\geqslant 0$ таково, что $Kp+n\leqslant mp$ и $Kp+n<(\varkappa+1)m$, то

$$\|u_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C^K(\bar{G})}\leqslant C\varepsilon^{\nu}, \tag{1.99}$$

где $\nu=\frac{(\varkappa+1)m-(Kp+n)}{mp}>0$.

В самом деле, условие $\frac{1}{q}-\frac{1}{p}<\frac{m-1}{n}$ обеспечивает непрерывность вложения $W_q^{m-1}(G)$ в $L_p(G)$, то есть,

$$\|u_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{L_p(G)}\leqslant C\varepsilon^{\frac{\varkappa+1}{q}}. \tag{1.100}$$

Условие $Kp+n<mp$ обеспечивает непрерывность вложения $W_p^m(G)$ в $C^K(\bar{G})$ причем, при этом

$$\|u_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C^K(\bar{G})}\leqslant C\varepsilon^{1-\omega}\|u_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{W_p^m(G)}+C\varepsilon^{-\omega}\|u_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{L_p(G)},$$

где $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\omega=\frac{K+\frac{n}{p}}{m}$, C - не зависит от ε. (См. [23] стр. I45.)

Отсюда, учитывая неравенства (I.8I) и (I.I00), и получаем требуемую оценку (I.99).

Глава II.

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ГЛАВНЫМ ЧЛЕНОМ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

§ I. Принцип максимума для одного класса квазилинейных эллиптических уравнений

В этой главе мы рассмотрим более подробно вырождение краевой задачи для уравнения второго порядка в алгебраическое уравнение. Будем при этом считать по-прежнему, что $P>2$.

Для простоты мы будем здесь вести изложение на примере конкретной задачи. Однако доказательства не будут существенно использовать специфику задачи и могут быть перенесены на общий случай краевой задачи для сильно эллиптического уравнения второго порядка.

I. Итак, в ограниченной области $G \subset R^n$ с границей Γ класса C^4 рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\varepsilon(u) \equiv -\varepsilon^p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Lambda_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \mathcal{F}(x,u) = 0, & (2.1) \\ u\big|_\Gamma = 0, & (2.2) \end{cases}$$

где $\Lambda_p(\tau) = \tau|\tau|^{p-2}$, $p>2$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Будем предполагать, что $\mathcal{F}(x,u) \in C^3(\bar{G} \times R^1)$, причем $\mathcal{F}'_u(x,u) \geq \alpha^2 > 0$. Кроме того, будем предполагать еще, что $p>n$. Тогда имеет место вложение $W_p^1(G) \subset C(\bar{G})$.

Наложенные условия обеспечивают существование и единственность решения $u_\varepsilon(x) \in W_p^1(G) \subset C(\bar{G})$ задачи (2.I)-(2.2), а

также существование и единственность решения $u_0(x) \equiv h(x) \in C^3(\bar{G})$ вырожденного уравнения:

$$\mathcal{F}(x,u) = 0.$$

Согласно изложенному в главе I, главный член асимптотики решения $u_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0^+$ имеет вид:

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = h(x) + U(\varepsilon, x), \tag{2.3}$$

где

$$U(\varepsilon,x) = \begin{cases} \chi\left(\frac{\tau_0(\varphi^k)}{\varepsilon}\right)\tau^k\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho, \varphi^k\right) + \left[1 - \chi\left(\frac{\tau_0(\varphi^k)}{\varepsilon}\right)\right]\eta\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho\right)\tau_0(\varphi^k) & \text{в } \Gamma_{2s}^k \\ 0 \quad \text{в} \quad G \setminus \bigcup_{k=1}^{N} \Gamma_{2s}^k . \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь множества Γ_{2s}^k определены в § 3 главы I; срезающие функции $\chi(\tau)$ и $\eta(\tau)$ введены в § 5 главы I; функция $\tau(t,\varphi)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} -\delta(\varphi)\frac{d}{dt}\Lambda_p\left(\frac{d\tau}{dt}\right) + g(\tau,\varphi) = 0, & (2.5) \\ \tau(0,\varphi) = \tau_0(\varphi) \equiv -h(x)\big|_\Gamma, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} \tau(t,\varphi) = 0, & (2.6) \end{cases}$$

где

$$\delta(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} |C_{0i}(0,\varphi)|^p, \quad g(\tau,\varphi) = \mathcal{F}(x(0,\varphi), h(x(0,\varphi)) + \tau);$$

функции $C_{ji}(\rho,\varphi)$ определены равенствами (I.33).

Если обозначить через $z(\varepsilon,x) = u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x)$ - погрешность при замене точного решения задачи (2.I)-(2.2) главным членом его асимптотики, то для функции $z(\varepsilon,x)$ справедливы оценки (I.8I) и (I.82) с $q=2$. Заметим, что из этих оценок при $n \geq 2$ не следует малость нормы функции $z(\varepsilon,x)$ в пространстве $C(\bar{G})$. В самом деле, пусть $\psi(x) \not\equiv 0$ - функция класса $C^\infty(R^n)$, но-

ситель которой содержится в единичном шаре $\mathcal{D}=\{x\in R^n: |x|<1\}$. Тогда при $\varepsilon\leq 1$ функция $f(\varepsilon,x)=\psi(\frac{x}{\varepsilon})$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathcal{D})$, причем

$$\|f(\varepsilon,x)\|_{W^0_2(\mathcal{D})}=\mathcal{O}(\varepsilon^{n/2}),\quad \|f(\varepsilon,x)\|_{W^1_p(\mathcal{D})}=\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{n-p}{p}}),$$

то есть оценки (I.8I)-(I.82) при $n\geq 2$ имеют место, но

$$\|f(\varepsilon,x)\|_{C(\bar{\mathcal{D}})}=\mathcal{O}(1).$$

Цель этой главы показать, что тем не менее, описанный выше процесс построения главного члена асимптотики решения задачи (2.I)-(2.2) приводит к равномерному в $\bar{G}$ приближению истинного решения, то есть $\|u_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C(\bar{G})}\to 0$ при $\varepsilon\to 0^+$.

Для доказательства этого мы воспользуемся более удобным в данном случае, чем энергетические оценки, принципом максимума в следующей форме.

Лемма 2.I. Пусть $u_\varepsilon(x)$ - решение задачи (2.I)-(2.2), а $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ - некоторое семейство функций из $C^2(\bar{G})$. Тогда

$$\max_{x\in\bar{G}}|u_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)|\leq\max\Big(\frac{1}{\alpha^2}\max_{x\in G}|\mathcal{M}_2(\tilde{u}_\varepsilon)|,\ \max_{x\in\partial G}|\tilde{u}_\varepsilon|\Big). \tag{2.7}$$

Доказательство.

Заметим, что решение $u_\varepsilon(x)$ задачи(2.I)-(2.2) не предполагается дважды дифференцируемым. Поэтому обычный метод доказательства принципа максимума, основанный на изучении производных функции $u_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)$ в точках экстремума, здесь не применим.

Чтобы обойти это затруднение, мы рассмотрим вместе с задачей (2.I)-(2.2) регуляризованную задачу:

$$\mathcal{M}_\varepsilon(w)+\lambda(\varepsilon)\mathcal{N}(w)=0,\quad w|_\Gamma=0, \tag{2.8}$$

где функция $\lambda(\varepsilon)>0$ будет выбрана позже, а

$$\mathcal{N}(w) \equiv -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(\nabla w),$$

$$b_i(\nabla w) = \frac{\partial w}{\partial x_i}\left[1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2\right]^{\frac{p-2}{2}}.$$

Аналогично тому, как это было сделано при рассмотрении примера I.I в § 2 главы I, показывается, что задача (2.8) имеет единственное решение $w_\varepsilon(x) \in C^2(\bar{G})$. Поэтому мы можем применить к решению $w_\varepsilon(x)$ задачи (2.8), доказанный в [I4] (гл. IУ следствие 8.I) для гладких решений, принцип максимума, согласно которому

$$\max_{x\in\bar{G}} |w_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)| \leq$$

$$\leq \max\left(\frac{1}{\alpha^2}\max_{x\in\bar{G}}|\mathcal{M}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)+\lambda(\varepsilon)\mathcal{N}(\tilde{u}_\varepsilon)|,\ \max_{x\in\partial G}|\tilde{u}_\varepsilon|\right). \qquad (2.9)$$

Покажем, что для произвольного $\delta>0$ мы можем выбрать $\lambda(\varepsilon)$ так, что

$$\frac{1}{\alpha^2}\lambda(\varepsilon)\max_{x\in\bar{G}}|\mathcal{N}(\tilde{u}_\varepsilon)| \leq$$

$$\leq \delta\max\left(\frac{1}{\alpha^2}\max_{x\in\bar{G}}|\mathcal{M}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)|,\ \max_{x\in\partial G}|\tilde{u}_\varepsilon|\right), \qquad (2.10)$$

$$\max_{x\in\bar{G}}|w_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(x)| \leq \delta\max\left(\frac{1}{\alpha^2}\max_{x\in\bar{G}}|\mathcal{M}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)|,\ \max_{x\in\partial G}|\tilde{u}_\varepsilon|\right), \qquad (2.11)$$

откуда в силу (2.9) и произвольности δ будет следовать оценка (2.7).

Возможность выбора $\lambda(\varepsilon)$ так, что имеет место неравенство (2.I0), очевидна.

Оценим в области G величину $|w_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(x)|$.

Заметим, что для $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(G)$ справедлива оценка:

$$\langle M_\varepsilon(u) - M_\varepsilon(v), u-v \rangle \equiv \varepsilon^p \sum_{i=1}^n \int_G \left[\Lambda_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \Lambda_p\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right] \frac{\partial(u-v)}{\partial x_i} dx +$$

$$+ \int_G [\mathcal{F}(x,u) - \mathcal{F}(x,v)](u-v)\, dx \geqslant$$

$$\geqslant 2^{1-p} \varepsilon^p \sum_{i=1}^n \int_G \left| \frac{\partial(u-v)}{\partial x_i} \right|^p dx + \alpha^2 \int_G (u-v)^2 dx ,$$

а для решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (2.I)-(2.2) выполняется условие:

$$\left| \langle M_\varepsilon(u_\varepsilon) - M_\varepsilon(v), u_\varepsilon - v \rangle \right| = \left| \langle -M_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - v \rangle \right| =$$

$$= \left| -\varepsilon^p \sum_{i=1}^n \int_G \Lambda_p\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \frac{\partial(u_\varepsilon - v)}{\partial x_i} dx - \int_G \mathcal{F}(x,v)(u_\varepsilon - v)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \varepsilon^p \sum_{i=1}^n \int_G \left| \Lambda_p\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \right|^{p/p-1} dx + 2^{-p} \varepsilon^p \sum_{i=1}^n \int_G \left| \frac{\partial(u_\varepsilon - v)}{\partial x_i} \right|^p dx +$$

$$+ C \int_G |\mathcal{F}(x,v)|^2 dx + \frac{\alpha^2}{2} \int_G (u_\varepsilon - v)^2 dx .$$

Поэтому,

$$2^{-p} \varepsilon^p \sum_{i=1}^n \int_G \left| \frac{\partial(u_\varepsilon - v)}{\partial x_i} \right|^p dx + \frac{\alpha^2}{2} \int_G (u_\varepsilon - v)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant C \varepsilon^p \sum_{i=1}^n \int_G \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p dx + C \int_G |\mathcal{F}(x,v)|^2 dx \leqslant C .$$

Отсюда, в частности, при $v \equiv 0$ имеем:

$$\sum_{i=1}^n \int_G \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right|^p dx \leqslant C \varepsilon^{-p}. \tag{2.12}$$

Аналогично, для $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(G)$ справедлива оценка:

$$\langle M_\varepsilon(u) + \lambda(\varepsilon) N(u) - (M_\varepsilon(v) + \lambda(\varepsilon) N(v)), u - v \rangle \equiv$$

$$\equiv \varepsilon^p \sum_{i=1}^{n} \int_G \left[\Lambda_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \Lambda_p\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right] \frac{\partial (u-v)}{\partial x_i} dx + \tag{2.13}$$

$$+ \lambda(\varepsilon) \sum_{i=1}^{n} \int_G \left[B_i(\nabla u) - B_i(\nabla v)\right] \frac{\partial (u-v)}{\partial x_i} dx + \int_G \left[F(x,u) - F(x,v)\right](u-v)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant 2^{1-p} \varepsilon^p \sum_{i=1}^{n} \int_G \left|\frac{\partial (u-v)}{\partial x_i}\right|^p dx + \alpha^2 \int_G (u-v)^2 dx ,$$

а для решений $u_\varepsilon(x)$ и $w_\varepsilon(x)$ задач (2.I)-(2.2) и (2.8) соответственно, выполнено условие:

$$\left|\langle M_\varepsilon(u_\varepsilon) + \lambda(\varepsilon) N(u_\varepsilon) - (M_\varepsilon(w_\varepsilon) + \lambda(\varepsilon) N(w_\varepsilon)),\, u_\varepsilon - w_\varepsilon \rangle\right| =$$

$$= \left|\lambda(\varepsilon) \langle N(u_\varepsilon), u_\varepsilon - w_\varepsilon \rangle\right| = \left|\lambda(\varepsilon) \sum_{i=1}^{n} \int_G B_i(\nabla u_\varepsilon) \frac{\partial (u_\varepsilon - w_\varepsilon)}{\partial x_i} dx\right| \leqslant \tag{2.14}$$

$$\leqslant C\left[\varepsilon^{-1}\lambda(\varepsilon)\right]^{\frac{p}{p-1}} \sum_{i=1}^{n} \int_G \left|B_i(\nabla u_\varepsilon)\right|^{\frac{p}{p-1}} dx + 2^{-p} \varepsilon^p \sum_{i=1}^{n} \int_G \left|\frac{\partial (u_\varepsilon - w_\varepsilon)}{\partial x_i}\right|^p dx .$$

Из соотношений (2.I3) и(2.I4) с учетом оценки (2.I2), имеем:

$$2^{-p} \varepsilon^p \sum_{i=1}^{n} \int_G \left|\frac{\partial (u_\varepsilon - w_\varepsilon)}{\partial x_i}\right|^p dx + \alpha^2 \int_G (u_\varepsilon - w_\varepsilon)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\varepsilon^{-1}\lambda(\varepsilon)\right)^{\frac{p}{p-1}} \sum_{i=1}^{n} \int_G \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|^p dx \leqslant C\left(\varepsilon^{-p}\lambda(\varepsilon)\right)^{\frac{p}{p-1}} ,$$

откуда, в силу непрерывности вложения $W_p^1(G)$ в $C(\bar{G})$, следует, что

$$\max_{x \in \bar{G}} \left|w_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x)\right| \leqslant C \left\|w_\varepsilon - u_\varepsilon\right\|_{W_p^1(G)} \leqslant C\left(\varepsilon^{-p}\lambda(\varepsilon)\right)^{1/p-1} .$$

Из последней оценки вытекает возможность выбора $\lambda(\varepsilon)$ так, что выполнено условие (2.II).

Лемма доказана.

2. Согласно леммам (I.4) и (I.5) при $2 < p < 4$ функция $U(\varepsilon,x)$, определенная равенством (2.4), принадлежит классу $C^2(\bar{G})$ при любом $\varepsilon > 0$. Положим в условиях леммы 2.I $\tilde{u}_\varepsilon(x) = h(x) + U(\varepsilon,x)$. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 2.I. Пусть $u_\varepsilon(x)$ - решение задачи (2.I)-(2.2), а функция $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ определена равенствами (2.3), (2.4).

Тогда

$$|u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x)| \leqslant C\varepsilon \qquad \text{при } \varepsilon \in (0,\varepsilon_0],\ x \in G. \tag{2.15}$$

Доказательство.

В силу оценки (2.7), нам достаточно убедиться в том, что $|\mathcal{M}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)| =$

$$= \left| -\varepsilon^p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Lambda_p(h(x) + U(\varepsilon,x)) + \mathcal{F}(x, h(x) + U(\varepsilon,x)) \right| \leqslant C\varepsilon \tag{2.16}$$

при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $x \in G$.

В области $\Omega_0 = G \setminus \operatorname{supp}_x U(\varepsilon,x)$ имеем $U(\varepsilon,x) \equiv 0$, поэтому

$$|\mathcal{M}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)| = \left| -\varepsilon^p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Lambda_p\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right) \right| \leqslant C\varepsilon^p \tag{2.17}$$

для $x \in \Omega_0$.

Рассмотрим произвольную окрестность Γ_{2s}^k и обозначим

$$\Omega_1 = \{x \in \Gamma_{2s}^k \cap \operatorname{supp}_x U(\varepsilon,x) : \tau_0(\varphi) \geqslant 2\varepsilon\},$$
$$\Omega_2 = \{x \in \Gamma_{2s}^k \cap \operatorname{supp}_x U(\varepsilon,x) : \varepsilon < \tau_0(\varphi) < 2\varepsilon\},$$
$$\Omega_3 = \{x \in \Gamma_{2s}^k \cap \operatorname{supp}_x U(\varepsilon,x) : \tau_0(\varphi) \leqslant \varepsilon\}.$$

На множестве Ω_1 функция $U(\varepsilon,x) = \tau(t,\varphi)$ дважды непрерывно дифференцируема. Поэтому, аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы I.2, можно показать, что

$$|\mathcal{M}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon \qquad \text{для } x \in \Omega_1. \tag{2.18}$$

(Напомним, что функция $z(t,\varphi)$ выбиралась так, чтобы обратить в нуль главный при $\varepsilon \to 0^+$ член выражения $\mathcal{M}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)$.)

В силу леммы I.3, на множестве Ω_2 имеем:

$$\left| \mathcal{D}^\alpha_{\rho,\varphi} z\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi\right)\right| \leqslant C\varepsilon^{-\alpha_0} |z_0(\varphi)|^{1+\frac{2}{p}\alpha_0-|\alpha|} \leqslant C\varepsilon^{1+\frac{2-p}{\alpha_0}-|\alpha|}$$

для $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$,

то есть, при $p < 4$:

$$|u(\varepsilon,x)| \leqslant C\varepsilon, \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x_i} u(\varepsilon,x)\right| \leqslant C\varepsilon^{\frac{2}{p}-1},$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(\varepsilon,x)\right| \leqslant C\varepsilon^{-1}.$$

Из последних оценок вытекает, что для $x \in \Omega_2$

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \Lambda_p\left(\frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial x_i}\right)\right| \leqslant C\varepsilon^{\nu},$$

где $\nu = (p-2)\left(\frac{2}{p}-1\right)-1 > 1-p$,

$$|\mathcal{F}(x,\tilde{u}_\varepsilon) - \mathcal{F}(x,h)| \leqslant C\varepsilon,$$

то есть,

$$|\mathcal{M}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon \quad \text{для} \quad x \in \Omega_2. \tag{2.19}$$

Наконец, в Ω_3 имеем $u(\varepsilon,x) = \left[1-\chi\left(\frac{z_0(\varphi)}{\varepsilon}\right)\right] h\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho\right) z_0(\varphi)$ и, значит,

$$\left|\mathcal{D}^\alpha_x u(\varepsilon,x)\right| \leqslant C\varepsilon^{1-|\alpha|}.$$

Отсюда следует, что

$$|\mathcal{M}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon \quad \text{для} \quad x \in \Omega_3. \tag{2.20}$$

Неравенства (2.I7)-(2.20) приводят к оценке (2.I6), что и завершает доказательство теоремы 2.I.

§ 2. Равномерная оценка погрешности при замене точного решения главным членом его асимптотики

Цель данного параграфа - показать, что теорема 2.I, доказанная в предыдущем параграфе при условии $2 < P < 4$, сохраняет силу и в случае произвольного $P > n$.

I. Как указывалось в замечании I.4, при $P \geqslant 4$ функция $u(\varepsilon, x)$, определенная равенством (2.4), не является дважды непрерывно дифференцируемой. Поэтому, проведенное выше доказательство не проходит при $P \geqslant 4$. Для доказательства оценки (2.I5) в случае произвольного $P > n$ мы введем вспомогательную функцию

$$V_\mu(\varepsilon, x) = \begin{cases} \chi\left(\frac{z_0(\varphi)}{\varepsilon}\right) w\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho, \varphi; \mu\right) \eta(\rho) & \text{в } \Gamma_{2s}^K, \\ 0 & \text{в } G \setminus \bigcup_{K=1}^{N} \Gamma_{2s}^K, \end{cases} \tag{2.21}$$

где срезающие функции $\chi(\tau), \eta(\tau)$ определены в § 5 главы I, а $w(t, \varphi; \mu)$ - решение краевой задачи для регуляризованного уравнения погранслоя:

$$-\delta(\varphi) \frac{d}{dt} \Lambda_P\left(\frac{dw}{dt}\right) - \mu \frac{d^2 w}{dt^2} + g(w, \varphi) = 0, \tag{2.22}$$

$$w(0, \varphi; \mu) = z_0(\varphi), \quad \lim_{t \to +\infty} w(t, \varphi; \mu) = 0. \tag{2.23}$$

Мы определим впоследствии параметр регуляризации μ равенством $\mu = \varepsilon^{P-2}$.

Существование и единственность решения $w(t, \varphi; \mu)$ задачи (2.22)-(2.23) обеспечиваются следующей теоремой.

Теорема 2.2. Пусть $\delta(\varphi) \in C^2(\Phi)$, $g(w, \varphi) \in C^3(R^1 \times \Phi)$, причем $\delta(\varphi) \geqslant \gamma^2 > 0$, $g'_w(w, \varphi) \geqslant \gamma^2 > 0$. Тогда при любых

$\varphi \in \Phi$ и $\mu > 0$ задача (2.22)-(2.23) имеет единственное в классе $W_p^1(R^+)$ решение $w(t,\varphi;\mu)$.

Как функция n переменных $(t, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ функция $w(t,\varphi;\mu)$ такова, что $w(t,\varphi;\mu) \in C^2(R^+ \times \Phi)$ и справедливы оценки:

$$|w(t,\varphi;\mu)| \leq |z_0(\varphi)| e^{-d^2 t}, \quad d > 0; \tag{2.24}$$

$$\left.\begin{aligned} &|w'_t(t,\varphi;\mu)| \leq C\,|w(t,\varphi;\mu)|^{2/p}, \\ &|w'_t(t,\varphi;\mu)| \leq C\mu^{-\frac{1}{2}}|w(t,\varphi;\mu)| \\ &|w'_{\varphi_k}(t,\varphi;\mu)| \leq C; \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|} w(t,\varphi;\mu)}{\partial t^{\alpha_0}\partial\varphi_k^{\alpha_1}\partial\varphi_j^{\alpha_2}}\right| \leq C\mu^{\frac{1-|\alpha|}{2}}\left(\frac{1}{|z_0(\varphi)|}+t\right)^{\alpha_1+\alpha_2}|w'_t(t,\varphi;\mu)| \quad \text{для } |\alpha| = 1,2; \tag{2.26}$$

$$|w'_t(t,\varphi;\mu)|^{\varkappa}\left|\frac{\partial^{|\alpha|} w(t,\varphi;\mu)}{\partial t^{\alpha_0}\partial\varphi_k^{\alpha_1}\partial\varphi_j^{\alpha_2}}\right| \leq C\left(\frac{1}{|z_0(\varphi)|}+t\right)^{\alpha_1+\alpha_2} \tag{2.27}$$

$$\text{для } \varkappa = \frac{p}{2}-2, \quad |\alpha| = 2;$$

$$|w'_t(t,\varphi;\mu)|^{\varkappa}\left|\frac{\partial^{|\alpha|} w(t,\varphi;\mu)}{\partial t^{\alpha_0}\partial\varphi_k^{\alpha_1}\partial\varphi_j^{\alpha_2}}\right| \leq C \tag{2.28}$$

$$\text{для } \varkappa \geq \frac{p}{2}-2+\alpha_1+\alpha_2, \quad |\alpha| = 2,$$

где константы C не зависят от $\mu \in (0, \mu_0]$.

Доказательство.

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы I.3, задача (2.22)-(2.23) может быть сведена к задаче Коши для уравнения первого порядка. Действительно, нетрудно проверить, что мы удовлетворим уравнению (2.22) и первому из граничных условий (2.23), если определим функцию $w(t,\varphi;\mu)$ как решение задачи Коши:

$$\frac{dw}{dt} = -H(w,\varphi;\mu), \quad w(0,\varphi;\mu) = z_0(\varphi), \tag{2.29}$$

где

$$H(w,\varphi;\mu) = \operatorname{sgn} w \cdot \sqrt{B(w,\varphi;\mu)}, \tag{2.30}$$

а функция $B(w,\varphi;\mu)$ определяется из соотношения:

$$\frac{p-1}{p}\delta(\varphi)B^{p/2}+\frac{1}{2}\mu B-\int_0^w g(\tau,\varphi)\,d\tau=0. \qquad (2.31)$$

Будем далее считать, не оговаривая это каждый раз особо, что $\xi\in R^+$, $\varphi\in\Phi$, $\mu\in(0,\mu_0]$, $|w|\leq R=\sup\limits_{\varphi\in\Phi}|\tau_0(\varphi)|<\infty$.

Так как $g(0,\varphi)=0$ и $g'_w(w,\varphi)\geq\gamma^2>0$, то $\int_0^w g(\tau,\varphi)\,d\tau>0$ при $w\neq 0$ и, значит, соотношение (2.31) определяет функцию $B(w,\varphi;\mu)$ такую, что $B(w,\varphi;\mu)\in C^2(R^1\times\Phi)$ $B(0,\varphi;\mu)=B'_w(0,\varphi;\mu)=0$ и $B(w,\varphi;\mu)>0$ при $w\neq 0$. Замечая, что $B''_{ww}(w,\varphi;\mu)\in C^2(R^1\times\Phi)$, получаем отсюда, что

$$H(w,\varphi;\mu)=w\sqrt{\frac{B(w,\varphi;\mu)}{w^2}}\in C^2(R^1\times\Phi).$$

При этом, из (2.31) следует, что

$$\left|H(w,\varphi;\mu)\right|=|B(w,\varphi;\mu)|^{\frac{1}{2}}\leq\left(\frac{p}{p-1}\delta^{-1}(\varphi)\int_0^w g(\tau,\varphi)\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\leq C|w|^{\frac{2}{p}}, \qquad (2.32$$

где здесь и далее C обозначает константу, не зависящую от μ.

Оценим производные функции $H(w,\varphi;\mu)$.

Поскольку

$$H'_w(w,\varphi;\mu)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}w\,\frac{B'_w(w,\varphi;\mu)}{\sqrt{B(w,\varphi;\mu)}}=$$

$$=\frac{1}{2}|g(w,\varphi)|\left(\frac{p-1}{2}\delta(\varphi)B^{\frac{p}{2}}+\frac{1}{2}\mu B\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\delta(\varphi)B^{\frac{p}{2}-1}+\frac{1}{2}\mu\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.3$$

и из равенства (2.31) следует, что

$$\frac{|g(w,\varphi)|}{\sqrt{2p}\left(\int_0^w g(\tau,\varphi)\,d\tau\right)^{1/2}}\leq\frac{1}{2}\frac{|g(w,\varphi)|}{\left(\frac{p-1}{2}\delta(\varphi)B^{p/2}+\frac{1}{2}\mu B\right)^{1/2}}\leq\frac{|g(w,\varphi)|}{2\left(\int_0^w g(\tau,\varphi)\,d\tau\right)^{1/2}}$$

то получаем оценку:

$$0 < d^2 \leqslant H'_w(w,\varphi;\mu) \leqslant C\mu^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.34}$$

где константы d и C не зависят от μ.

Далее имеем:

$$H'_{\varphi_k}(w,\varphi;\mu) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn} w \frac{B'_{\varphi_k}(w,\varphi;\mu)}{\sqrt{B(w,\varphi;\mu)}} = \frac{1}{2}H(w,\varphi;\mu)\frac{B'_{\varphi_k}(w,\varphi;\mu)}{B(w,\varphi;\mu)} \tag{2.35}$$

и

$$H''_{\varphi_k\varphi_j}(w,\varphi;\mu) =$$

$$= \frac{1}{2}H(w,\varphi;\mu)\left[\frac{B''_{\varphi_k\varphi_j}(w,\varphi;\mu)}{B(w,\varphi;\mu)} - \frac{1}{2}\frac{B'_{\varphi_k}(w,\varphi;\mu)}{B(w,\varphi;\mu)}\cdot\frac{B'_{\varphi_j}(w,\varphi;\mu)}{B(w,\varphi;\mu)}\right] \tag{2.36}$$

Учитывая, что

$$\left|\frac{B'_{\varphi_k}(w,\varphi;\mu)}{B(w,\varphi;\mu)}\right| = \left|\frac{\frac{p-1}{p}\delta'_{\varphi_k}(\varphi)B^{\frac{p}{2}} - \int_0^w g'_{\varphi_k}(\tau,\varphi)\,d\tau}{\delta(\varphi)\frac{p-1}{2}B^{p/2} + \frac{1}{2}\mu B}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{p}\left|\frac{\delta'_{\varphi_k}(\varphi)}{\delta(\varphi)}\right| + \left|\frac{\int_0^w g'_{\varphi_k}(\tau,\varphi)\,d\tau}{\int_0^w g(\tau,\varphi)\,d\tau}\right| \leqslant C$$

и

$$\left|\frac{B''_{\varphi_k\varphi_j}(w,\varphi;\mu)}{B(w,\varphi;\mu)}\right| =$$

$$= \left|-\frac{\delta(\varphi)(p-1)(p-2)B^{p/2}}{\left(\delta(\varphi)\frac{p-1}{2}B^{p/2} + \frac{1}{2}\mu B\right)}\cdot\frac{B'_{\varphi_k}}{B}\cdot\frac{B'_{\varphi_j}}{B} - \frac{\frac{p-1}{2}\delta'_{\varphi_k}(\varphi)B^{p/2-1}}{\left(\delta(\varphi)\frac{p-1}{2}B^{p/2-1} + \frac{1}{2}\mu\right)}\cdot\frac{B'_{\varphi_j}}{B} -\right.$$

$$\left. - \frac{\frac{p-1}{2}\delta'_{\varphi_j}(\varphi)B^{p/2-1}}{\left(\delta(\varphi)\frac{p-1}{2}B^{p/2-1} + \frac{1}{2}\mu\right)}\cdot\frac{B'_{\varphi_k}}{B} - \frac{\frac{p-1}{p}\delta''_{\varphi_k\varphi_j}(\varphi)B^{p/2} - \int_0^w g''_{\varphi_k\varphi_j}(\tau,\varphi)\,d\tau}{\left(\delta(\varphi)\frac{p-1}{2}B^{p/2} + \frac{1}{2}\mu B\right)}\right| \leqslant C$$

получаем из равенств (2.35) и (2.36) оценки:

$$\left| H'_{\varphi_k}(w,\varphi;\mu)\right| \leqslant C\left|H(w,\varphi;\mu)\right|, \quad \left|H''_{\varphi_k\varphi_j}(w,\varphi;\mu)\right| \leqslant C\left|H(w,\varphi;\mu)\right|. \qquad (2.37)$$

Вернемся к задаче (2.29). В силу того, что $H(w,\varphi;\mu) \in C^2(R^1\times\Phi)$ и $\operatorname{sgn} H(w,\varphi;\mu) = \operatorname{sgn} w$, задача (2.29) имеет единственное решение $w(t,\varphi;\mu) \in C^2(R^+\times\Phi)$, которое монотонно убывает при возрастании t, если $\tau_0(\varphi) > 0$, и монотонно возрастает, если $\tau_0(\varphi) < 0$. Более того, так как $H(w,\varphi;\mu) = w\,H'_w(\tau,\varphi;\mu)$, где $|\tau| \leqslant R$, то из оценки (2.34) и теоремы сравнения для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [27]) следует неравенство (2.24).

Из соотношений (2.32), (2.33) и (2.34) следуют сразу первые две оценки в (2.35), а также соотношения:

$$\left|w''_{tt}(t,\varphi;\mu)\right| = \left|-H'_w(w,\varphi;\mu)\,w'_t(t,\varphi,\mu)\right| \leqslant C\mu^{-\frac{1}{2}}\left|w'_t(t,\varphi;\mu)\right|$$

и

$$\left|w'_t(t,\varphi;\mu)\right|^{\varkappa}\left|w''_{tt}(t,\varphi;\mu)\right| = \left|B(w,\varphi;\mu)\right|^{\frac{\varkappa+1}{2}} H'_w(w,\varphi) \leqslant C$$

при $\frac{\varkappa+1}{2} \geqslant \frac{p-2}{4}$, то есть при $\varkappa \geqslant \frac{p}{2}-2$.

Если обозначить $v_k(t,\varphi;\mu) = w'_{\varphi_k}(t,\varphi;\mu)$, то функция $v_k(t,\varphi;\mu)$ удовлетворяет уравнению в вариациях:

$$\frac{dv_k}{dt} = -H'_w(w,\varphi;\mu)\,v_k - H'_{\varphi_k}(w,\varphi;\mu).$$

Решение этого уравнения дается формулой:

$$v_K(t,\varphi;\mu)=v_K(0,\varphi;\mu)\exp\left\{-\int_0^t H'_w(w(s,\varphi;\mu),\varphi;\mu)\,ds\right\}-$$
$$-\int_0^t H'_{\varphi_K}(w(\tau,\varphi),\varphi;\mu)\exp\left\{-\int_\tau^t H'_w(w(s,\varphi;\mu),\varphi;\mu)\,ds\right\}d\tau,$$

из которой, в силу неравенств (2.34) и (2.37), следует последняя оценка в (2.25).

Заметим далее, что решение $w(t,\varphi;\mu)$ задачи (2.29) удовлетворяет соотношению:

$$t=B(w,\varphi;\mu)\equiv\int_w^{\tau_0(\varphi)}\frac{d\tau}{H(\tau,\varphi;\mu)}\,. \tag{2.38}$$

При этом в силу оценок (2.34) и (2.37) имеем:

$$\left|B'_{\varphi_K}(w,\varphi;\mu)\right|=\left|\frac{\frac{\partial}{\partial\varphi_K}\tau_0(\varphi)}{H(\tau_0(\varphi),\varphi;\mu)}-\int_w^{\tau_0(\varphi)}\frac{H'_{\varphi_K}(\tau,\varphi;\mu)}{H^2(\tau,\varphi;\mu)}\,d\tau\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\left|\frac{\partial}{\partial\varphi_K}\tau_0(\varphi)\right|}{d^2\cdot|\tau_0(\varphi)}+\operatorname{sgn}w\int_w^{\tau_0(\varphi)}\frac{|H'_{\varphi_K}(\tau,\varphi;\mu)|}{|H^2(\tau,\varphi;\mu)|}\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C}{|\tau_0(\varphi)|}+CB(w,\varphi;\mu)\leqslant C\left(\frac{1}{|\tau_0(\varphi)|}+t\right). \tag{2.39}$$

Аналогично, для функции $B''_{\varphi_K\varphi_j}(w,\varphi;\mu)$ получаем оценку:

$$\left|B''_{\varphi_K\varphi_j}(w,\varphi;\mu)\right|=$$
$$=\left|\frac{\frac{\partial^2}{\partial\varphi_j\partial\varphi_K}\tau_0(\varphi)}{H(\tau_0(\varphi),\varphi;\mu)}-\frac{\frac{\partial}{\partial\varphi_K}\tau_0(\varphi)\left[H'_{\varphi_j}(\tau_0(\varphi),\varphi;\mu)+H'_w(\tau_0(\varphi),\varphi;\mu)\frac{\partial}{\partial\varphi_j}\tau_0(\varphi)\right]}{H^2(\tau_0(\varphi),\varphi;\mu)}-\right.$$
$$-\frac{\frac{\partial}{\partial\varphi_j}\tau_0(\varphi)\left[H'_{\varphi_K}(\tau_0(\varphi),\varphi;\mu)+H'_w(\tau_0(\varphi),\varphi;\mu)\frac{\partial}{\partial\varphi_K}\tau_0(\varphi)\right.}{H^2(\tau_0(\varphi),\varphi;\mu)}- \tag{2.40}$$
$$\left.-\int_w^{\tau_0(\varphi)}\left[\frac{H''_{\varphi_j\varphi_K}(\tau,\varphi;\mu)}{H^2(\tau,\varphi;\mu)}-2\,\frac{H'_{\varphi_K}(\tau,\varphi;\mu)H'_{\varphi_j}(\tau,\varphi;\mu)}{H^3(\tau,\varphi;\mu)}\right]d\tau\right|\leqslant C\mu^{-1/2}\left(\frac{1}{|\tau_0(\varphi)|}+t\right)^2$$

Поскольку из соотношения (2.38) следует, что

$$w'_{\varphi_k}(t,\varphi;\mu) = -\frac{B'_{\varphi_k}(w,\varphi;\mu)}{B'_w(w,\varphi;\mu)} = H(w,\varphi;\mu)\, B'_{\varphi_k}(w,\varphi;\mu)$$

и

$$w''_{t\varphi_k}(t,\varphi;\mu) = H(w,\varphi;\mu)\left[-H'_w(w,\varphi;\mu)B'_{\varphi_k}(w,\varphi;\mu) - \frac{H'_{\varphi_k}(w,\varphi;\mu)}{H(w,\varphi;\mu)}\right], \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned} w''_{\varphi_k\varphi_j}(t,\varphi;\mu) = H(w,\varphi;\mu)\Big[& H'_w(w,\varphi;\mu)B'_{\varphi_k}(w,\varphi;\mu)B'_{\varphi_j}(w,\varphi;\mu) + \\ & + \frac{H'_{\varphi_k}(w,\varphi;\mu)}{H(w,\varphi;\mu)}B'_{\varphi_j}(w,\varphi;\mu) + \frac{H'_{\varphi_j}(w,\varphi;\mu)}{H(w,\varphi;\mu)}B'_{\varphi_k}(w,\varphi;\mu) + \\ & + B''_{\varphi_j\varphi_k}(w,\varphi;\mu)\Big], \end{aligned} \tag{2.42}$$

то из соотношений (2.39) и (2.40) вытекают оценки (2.26) и (2.27).

По доказанному выше

$$|w'_{\varphi_j}(t,\varphi;\mu)| = |H(w,\varphi;\mu)B'_{\varphi_j}(w,\varphi;\mu)| \leqslant C .$$

Поэтому из соотношений (2.41) и (2.42) получаем оценки (2.28).

Теорема 2.2. доказана.

2. Функция $V_\mu(\varepsilon,x)$, определенная равенством (2.21), обладает требуемыми в лемме 2.1 свойствами гладкости и поэтому

$$\begin{aligned} & \max_{x\in\bar G} |u_\varepsilon(x) - (h(x) + V_\mu(\varepsilon,x))| \leqslant \\ & \leqslant \max\left(\frac{1}{\alpha^2}\max_{x\in\bar G}|\mathcal{M}_\varepsilon(h+V_\mu)|,\ \max_{x\in\partial G}|h+V_\mu|\right) \leqslant \\ & \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\max_{x\in\bar G}|\mathcal{M}_\varepsilon(h+V_\mu)| + 2\varepsilon . \end{aligned}$$

Следовательно, мы получим, что

$$\max_{x\in\bar G}|u_\varepsilon(x) - (h(x) + V_\mu(\varepsilon,x))| \leqslant C\varepsilon , \tag{2.43}$$

если докажем следующую лемму.

Лемма 2.2. Пусть функция $V_\mu(\varepsilon,x)$ определена равенством (2.21). Тогда

$$\max_{x\in\bar G}\left|\mathcal{M}_\varepsilon(h+V_\mu)\right|\leq C\varepsilon \quad \text{при} \quad \mu=\varepsilon^{p-2},\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0],\ p\geq 4.$$

Доказательство.

В области $\Omega_0=G\setminus \operatorname{supp}_x V_\mu(\varepsilon,x)$ аналогично тому, как была получена оценка (2.17), получаем:

$$\left|\mathcal{M}_\varepsilon(h+V_\mu)\right|\leq C\varepsilon^p. \tag{2.44}$$

Рассмотрим произвольную окрестность Γ^K_{2s} и обозначим

$\Omega_1=\{x\in\Gamma^K_{2s}\cap \operatorname{supp}_x V_\mu(\varepsilon,x):\ \rho(x)\geq s\}$,

$\Omega_2=\{x\in\Gamma^K_s\cap \operatorname{supp}_x V_\mu(\varepsilon,x):\ z_0(\varphi)\geq 2\varepsilon\}$, $\Omega_3=\{x\in\Gamma^K_s\cap \operatorname{supp}_x V_\mu(\varepsilon,x):\ z_0(\varphi)<2\varepsilon$

На множестве Ω_1 из оценок (2.24)-(2.26) следует, что

$$\left|\mathcal{D}^\alpha_x V_\mu(\varepsilon,x)\right|\leq C\varepsilon^{-2}\mu^{-1/2}e^{-d_1^2\frac{s}{\varepsilon}}$$

где $|\alpha|\leq 2$, $0<d_1<\sqrt{\frac{2}{p}}\,d$.

Поэтому на Ω_1 сохраняется оценка (2.44).

Рассмотрим множество Ω_2. Из оценок (2.24)-(2.28) следует, что функция $w(t,\varphi;\mu)$ и ее первые производные равномерно по $\mu\in(0,\mu_0]$ ограничены в $R^+\times\Phi$, а для вторых производных справедливы оценки:

$$\left.\begin{aligned}&|w''_{tt}(t,\varphi;\mu)|\leq C\mu^{-1/2};\quad |\varepsilon w''_{t\varphi_K}(t,\varphi;\mu)|\leq C\mu^{-1/2};\\&|\varepsilon^2 w''_{\varphi_j\varphi_K}(t,\varphi;\mu)|\leq C\mu^{-1/2};\end{aligned}\right\} \tag{2.45}$$

$$\left.\begin{aligned}&|w'_t(t,\varphi;\mu)|^{\varkappa}|w''_{tt}(t,\varphi;\mu)|\leq C,\quad |w'_t(t,\varphi;\mu)|^{\varkappa}|\varepsilon w''_{t\varphi_K}(t,\varphi;\mu)|\leq C\\&|w'_t(t,\varphi;\mu)|^{\varkappa}|\varepsilon^2 w''_{\varphi_K\varphi_j}(t,\varphi;\mu)|\leq C \quad \text{для} \quad \varkappa\geq\frac{p}{2}-2;\end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

$$\left.\begin{aligned}&|w'_t(t,\varphi;\mu)|^{p-2}|w''_{t\varphi_K}(t,\varphi;\mu)|\leq C,\\&|w'_t(t,\varphi;\mu)|^{p-2}|w''_{\varphi_K\varphi_j}(t,\varphi;\mu)|\leq C.\end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

Перейдем в выражении

$$S(\varepsilon,\varphi,t) \equiv \varepsilon^{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Lambda_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(h(x)+V_\mu(\varepsilon,x)\right)\right) =$$

$$= (p-1)\sum_{i=1}^{n}\left|\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\left(h(x)+V_\mu(\varepsilon,x)\right)\right|^{p-2}\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(h(x)+V_\mu(\varepsilon,x)\right)$$

к координатам (t,φ). При этом в силу равномерной ограниченности функции $w(t,\varphi;\mu)$ и ее первых производных имеем:

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\left(h(x)+V_\mu(\varepsilon,x)\right) = C_{0i}(\varepsilon t,\varphi)\,w'_t(t,\varphi;\mu) + \varepsilon R(\varepsilon,t,\varphi), \tag{2.48}$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(h(x)+V_\mu(\varepsilon,x)\right) = C_{0i}^2(\varepsilon t,\varphi)\,w''_{tt}(t,\varphi;\mu) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{n-1}C_{0i}(\varepsilon t,\varphi)\,C_{0k}(\varepsilon t,\varphi)\,\varepsilon w''_{t\varphi_k}(t,\varphi;\mu) + \tag{2.49}$$

$$+\sum_{k,j=1}^{n-1}C_{ji}(\varepsilon t,\varphi)\,C_{ki}(\varepsilon t,\varphi)\,\varepsilon^2 w''_{\varphi_k\varphi_j}(t,\varphi;\mu) + \varepsilon R(\varepsilon,t,\varphi),$$

где $R(\varepsilon,t,\varphi)$ здесь и ниже означает некоторую равномерно ограниченную при $\mu=\varepsilon^{p-2}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $t\in R^+$, $\varphi\in\Phi$ функцию.

Используя формулу Тейлора, мы можем для $a,b\in R^1$ записать:

$$|a+b|^{p-2} = \sum_{m=0}^{[p-2]} d_m(a,b)\,|a|^{p-2-m}\,b^m,$$

где $d_0(a,b)=1$, $d_m(a,b)=d_m(\operatorname{sgn} a)=\frac{1}{m!}|a|^{-(p-2-m)}\frac{d^m}{da^m}|a|^{p-2}$,

$d_{[p-2]}(a,b)$ - функция, ограниченная на ограниченных в R^2 множествах. Поэтому из равенств (2.48), (2.49) получаем, что

$$S_i(\varepsilon,t,\varphi) \equiv \left|\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\left(h(x)+V_\mu(\varepsilon,x)\right)\right|^{p-2}\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(h(x)+V_\mu(\varepsilon,x)\right) =$$

$$= |C_{0i}(\varepsilon t,\varphi)|^{p-2}\,|w'_t|^{p-2}\,w''_{tt} + \varepsilon\sum_{k=1}^{n-1}R(\varepsilon,t,\varphi)\,|w'_t|^{p-2}\,w''_{t\varphi_k} +$$

$$+\varepsilon^2\sum_{k,j=1}^{n-1}R(\varepsilon,t,\varphi)\,|w'_t|^{p-2}\,|w''_{\varphi_k\varphi_j}| +$$

$$+\sum_{m=1}^{[p-2]}\varepsilon^m\Big(\sum_{k=1}^{n-1}R(\varepsilon,t,\varphi)\,|w_t'|^{p-2-m}\,\varepsilon w''_{t\varphi_k}+$$

$$+\sum_{k,j=1}^{n-1}R(\varepsilon,t,\varphi)\,|w_t'|^{p-2-m}\,\varepsilon^2 w''_{\varphi_k\varphi_j}\Big)+$$

$$+\varepsilon R(\varepsilon,t,\varphi),$$

и в силу оценок (2.45)-(2.47) имеем:

$$S(\varepsilon,t,\varphi)=|c_{0i}(\varepsilon t,\varphi)|^p\,|w_t'|^{p-2}w''_{tt}+\varepsilon R(\varepsilon,t,\varphi).$$

Таким образом,

$$S(\varepsilon,t,\varphi)=\Big(\sum_{i=1}^{n}|c_{0i}(\varepsilon t,\varphi)|^p\Big)\frac{d}{dt}\Lambda_p\Big(\frac{dw}{dt}\Big)+\varepsilon R(\varepsilon,t,\varphi)=$$

$$=\delta(\varphi)\frac{d}{dt}\Lambda_p\Big(\frac{dw}{dt}\Big)+\varepsilon t\frac{d}{dt}\Lambda_p\Big(\frac{dw}{dt}\Big)\Big[\frac{\partial}{\partial\rho}\sum_{i=1}^{n}|c_{0i}(\rho,\varphi)|^p\Big|_{\rho=\tau}\Big]+$$

$$+\varepsilon R(\varepsilon,t,\varphi),$$

где $\tau\in[0,s]$.

Поскольку $\mathcal{F}(x(\rho,\varphi),h(x(\rho,\varphi)))\equiv 0$, то при некоторых $\tau\in[0,s]$ и $|\theta|\le\sup\limits_{\varphi\in\Phi}|\tau_0(\varphi)|$ имеем:

$$\mathcal{F}(x(\rho,\varphi),h(x(\rho,\varphi))+w)=$$

$$=\mathcal{F}(x(0,\varphi),h(x(0,\varphi))+w)+\Big\{\frac{\partial}{\partial w}\Big[\frac{\partial}{\partial\rho}\mathcal{F}(x(\rho,\varphi),h(x(\rho,\varphi))+w)\Big|_{\rho=\tau}\Big]\Big|_{w=\theta}\Big\}\varepsilon t w=$$

$$=g(w,\varphi)+\varepsilon R(\varepsilon,t,\varphi)\cdot t w.$$

Итак, для точек Ω_2 получили:

$$\mathcal{M}_\varepsilon(h(x)+V_\mu(\varepsilon,x)=\Big[-\delta(\varphi)\frac{d}{dt}\Lambda_p\Big(\frac{dw}{dt}\Big)+g(w,\varphi)\Big]+ \tag{2.49}$$

$$+\varepsilon R(\varepsilon,t,\varphi)t\Big[-\frac{d}{dt}\Lambda_p\Big(\frac{dw}{dt}\Big)\Big]+\varepsilon R(\varepsilon,t,\varphi)tw+\varepsilon R(\varepsilon,t,\varphi)=$$

$$=\mu w''_{tt}+\varepsilon R(\varepsilon,t,\varphi)\delta^{-1}(\varphi)t\Big[\mu w''_{tt}-g(w,\varphi)\Big]+\varepsilon R(\varepsilon,t,\varphi)tw+\varepsilon R(\varepsilon,t,\varphi).$$

Оценки (2.24)-(2.26) показывают, что

$$|\mu w''_{tt}|\le C\mu^{1/2}\le C\varepsilon^{\frac{p-2}{2}},\quad |\mu w''_{tt}|\le C|w|,\quad |w|\le Ce^{-d^2t}.$$

Так как $g(w,\varphi) \leq C|w|$ (в силу того, что $g(0,\varphi)=0$), то из соотношения (2.49) следует, что

$$|\mathcal{M}_\varepsilon(h(x)+V_\mu(\varepsilon,x))| \leq C\varepsilon \qquad \text{для } x \in \Omega_2 . \tag{2.50}$$

Рассмотрим, наконец, множество Ω_3. Здесь $V_\mu(\varepsilon,x)=\tilde{w}(t,\varphi;\mu)$, где $\tilde{w}(t,\varphi;\mu)=\chi\left(\frac{1}{\varepsilon}\tau_0(\varphi)\right)w(t,\varphi;\mu)$.

Заметим, что при каждом дифференцировании функции $\tilde{w}(t,\varphi;\mu)$ по φ_k появляется множитель $\frac{1}{\varepsilon}$. С другой стороны, имеем $|w(t,\varphi;\mu)| \leq |\tau_0(\varphi)| \leq 2\varepsilon$. Учитывая это, а также пользуясь первой из оценок (2.25), непосредственной проверкой убеждаемся, что оценки (2.45)-(2.47) сохраняются при замене $w(t,\varphi;\mu)$ на $\tilde{w}(t,\varphi;\mu)$.

Повторяя рассуждения, приведенные при выводе оценки (2.50), мы придем к равенству (2.49), где w заменено на $\tilde{w}$. Учитывая, что $|g(w,\varphi)-g(\tilde{w},\varphi)| \leq C|w-\tilde{w}| \leq C\varepsilon$, получаем отсюда оценку (2.50) и для $x \in \Omega_3$.

Тем самым лемма 2.2 полностью доказана.

Итак, мы показали, что справедливо соотношение (2.45). Теперь для завершения доказательства теоремы 2.I в случае $p \geq 4$ нам достаточно показать, что справедлива следующая лемма.

<u>Лемма 2.3.</u> Пусть функции $U(\varepsilon,x)$ и $V_\mu(\varepsilon,x)$ определены равенствами (2.4) и (2.2I), соответственно. Тогда

$$|U(\varepsilon,x)-V_\mu(\varepsilon,x)| \leq C\varepsilon$$

при $x \in G$, $\mu=\varepsilon^{p-2}$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $p \geq 4$.

<u>Доказательство.</u>

В области $G \setminus \operatorname{supp}_x V_\mu(\varepsilon,x)$ имеем $U(\varepsilon,x) \equiv V_\mu(\varepsilon,x) \equiv 0$.

Рассмотрим произвольную окрестность Γ^k_{2s}, и пусть множества $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ определены как при доказательстве предыдущей леммы.

На множестве Ω_1 функция $U(\varepsilon,x)\equiv 0$, а $V_\mu = \chi\left(\frac{\tau_0(\varphi)}{\varepsilon}\right) w(t,\varphi;\mu)$, так что в силу оценки (2.24) имеем: $|U(\varepsilon,x)-V_\mu(\varepsilon,x)| \leq C\varepsilon^K$ для $x\in\Omega_1$ при любом $K>0$.

На множестве Ω_3 справедливы оценки $|\tau(t,\varphi)|\leq|\tau_0(\varphi)|\leq 2\varepsilon$ и $|w(t,\varphi;\mu)|\leq|\tau_0(\varphi)|\leq 2\varepsilon$. Поэтому $|U(\varepsilon,x)-V_\mu(\varepsilon,x)|\leq C\varepsilon$ для $x\in\Omega_3$.

Для получения нужной оценки на множестве Ω_2 вычтем из равенства (2.5) равенство (2.22), умножим разность на функцию $\tau(t,\varphi)-w(t,\varphi;\mu)$ и проинтегрируем по частям. При этом, учитывая, что $\operatorname{supp}_t(\tau(t,\varphi))\subseteq[0,\beta_0]$, получим:

$$\delta(\varphi)\int_0^\infty\left[\Lambda_p\left(\frac{d\tau}{dt}\right)-\Lambda_p\left(\frac{dw}{dt}\right)\right]\left(\frac{d\tau}{dt}-\frac{dw}{dt}\right)dt+$$
$$+\int_0^\infty\left[g(\tau,\varphi)-g(w,\varphi)\right](\tau-w)\,dt= \tag{2.51}$$
$$=\mu\int_0^\infty\frac{dw}{dt}\left(\frac{d\tau}{dt}-\frac{dw}{dt}\right)dt\leq\mu\int_0^{\beta_0}\frac{dw}{dt}\left(\frac{d\tau}{dt}-\frac{dw}{dt}\right)dt.$$

Для оценки левой части соотношения (2.51) снизу мы воспользуемся тем, что $g'_w(w,\varphi)\geq\alpha^2>0$, и алгебраическим неравенством:

$$\left(|a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b\right)(a-b)\geq 2^{-p}|a-b|^p+2^{-p}|b|^{p/2}|a-b|^{p/2}, \tag{2.52}$$

которое справедливо при $p\geq 4$.

Докажем неравенство (2.52). Для этого достаточно показать, что

$$\left(|a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b\right)(a-b)\geq 2^{1-p}|a-b|^p$$

и

$$\left(|a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b\right)(a-b)\geq 2^{1-p}(|a|+|b|)^{p-s}|a-b|^s$$

для $p\geq s\geq 2$.

Первое из последних двух неравенств было доказано при рассмотрении примера I.I в § 2 главы I. Для доказательства второго неравенства воспользуемся тождеством:

$$(|a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b)(a-b)=\frac{1}{2}(|a|^{p-2}+|b|^{p-2})(a-b)^2+\frac{1}{2}(|a|^{p-2}-|b|^{p-2})(a^2-b^2)$$

и неравенством

$$|a|^{p-2}+|b|^{p-2}\geqslant 2^{3-p}(|a|+|b|)^{p-2}\geqslant 2^{3-p}(|a|+|b|)^{p-s}|a-b|^{s-2},$$

справедливым в силу выпуклости функции $|a|^{p-2}$ при $p\geqslant 3$.

Для оценки правой части неравенства (2.5I) сверху воспользуемся неравенством Юнга: $ab\leqslant C(\gamma)a^{q/q-1}+\gamma b^q$ с $q=\frac{p}{2}$ и $\gamma=2^{-p}$.

В результате получим

$$2^{-p}\int_0^\infty\left|\frac{dz}{dt}-\frac{dw}{dt}\right|^p dt+2^{-p}\int_0^\infty\left|\frac{dw}{dt}\right|^{\frac{p}{2}}\left|\frac{dz}{dt}-\frac{dw}{dt}\right|^{\frac{p}{2}}dt+\alpha^2\int_0^\infty(z-w)^2dt\leqslant$$

$$\leqslant C\mu^{p/p-2}+2^{-p}\int_0^{\beta_0}\left|\frac{dw}{dt}\right|^{\frac{p}{2}}\left|\frac{dz}{dt}-\frac{dw}{dt}\right|^{\frac{p}{2}}dt,$$

откуда, учитывая непрерывность вложения $W_p^1(R^+)\subset C(R^+)$, следует, что

$$|u(\varepsilon,x)-v_\mu(\varepsilon,x)|\leqslant C\mu^{1/p-2}=C\varepsilon \qquad \text{для } x\in\Omega_2.$$

Последняя оценка завершает доказательство леммы 2.2, а тем самым и доказательство теоремы 2.I в случае $p\geqslant 4$.

<u>Замечание 2.I.</u> Если мы положим $\tilde{u}_\varepsilon(x)=h(x)+\tilde{u}(\varepsilon,x)$, где

$$\tilde{u}(\varepsilon,x)=\begin{cases} z^k(\frac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi^k) & \text{в } \Gamma_s^k \\ 0 & \text{в } G\setminus\bigcup\limits_{k=1}^N\Gamma_s^k, \end{cases}$$

то нетрудно видеть, что для функции $u(\varepsilon,x)$, определенной согласно (2.4), имеем: $|u(\varepsilon,x)-\tilde{u}(\varepsilon,x)|\leqslant C\varepsilon$. Поэтому сохраняется оценка (2.I5), то есть $|u_\varepsilon(x)-(h(x)+\tilde{u}(\varepsilon,x))|\leqslant C\varepsilon$ при $x\in G$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $p>n$, $p>2$.

Глава Ш.

АНАЛОГ РЕГУЛЯРНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ I. Построение асимптотики решения нелинейной краевой задачи

I. В предыдущих главах мы ограничились построением и обоснованием построения главного члена асимптотики решения задачи (I.I) - (I.2). При этом было установлено, что погранслойная поправка имеет малую гладкость, и это обстоятельство не устраняется повышением гладкости данных задачи (I.I)-(I.2). Это приводит к определенным затруднениям в построении следующих членов асимптотики. В частности, если мы аналогично тому, как это делалось в § 3 главы I, потребуем, чтобы обращались в нуль коэффициенты при соответствующих степенях ε в разложении выражения $\varepsilon^p \mathcal{T}_{2m}(\tilde{u}_\varepsilon) + \mathcal{T}_{2m-2}(\tilde{u}_\varepsilon)$, то для определения погранслоев более высокого порядка малости мы получим задачи, не имеющие, вообще говоря, решений.

Однако при наличии в уравнении дополнительных членов с малым параметром может иметь место ситуация, отличная от рассмотренной, когда асимптотическое поведение решения, рассматриваемой задачи более сходно с поведением решения в случае регулярного вырождения линейных уравнений (см. [7]). В данной главе мы рассмотрим именно такую ситуацию.

Для простоты изложения мы, как и в предыдущей главе, ограничимся рассмотрением модельной задачи. Аналогично изучается и более общая задача.

2. Итак, рассмотрим в ограниченной области $G \subset R^n$ задачу:

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\varepsilon(u) \equiv -\varepsilon^p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Lambda_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \varepsilon^2 \Delta u + \mathcal{F}(x,u) = 0, & (3.1) \\ u|_\Gamma = 0. & (3.2) \end{cases}$$

Здесь $\Lambda_p(\tau) = |\tau|^{p-2}\tau$, $p \geq 2$, функция $\mathcal{F}(x,u)$ и граница Γ области G достаточно гладкие, причем

$$\mathcal{F}_1(x,u) \equiv \frac{\partial}{\partial u}\mathcal{F}(x,u) \geq \alpha^2 > 0,$$

и для производных $\mathcal{F}_k(x,u) \equiv \frac{\partial^k}{\partial u^k}\mathcal{F}(x,u)$ справедлива оценка

$$|\mathcal{F}_k(x,u)| \leq C(1+|u|)^{\ell-1},$$

где ℓ - произвольно при $n \leq p$, $\frac{1}{\ell} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ при $n > p$.

Наложенные условия обеспечивают существование и единственность решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (3.I)-(3.2) в классе $\overset{\circ}{W}{}^1_p(G)$.

Отметим сразу, что более общая задача:

$$-\varepsilon^p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Lambda_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \varepsilon^\sigma \Delta u + \mathcal{F}(x,u) = 0, \qquad u|_\Gamma = 0$$

при $0 < \sigma < 2$ рассматривается аналогично задаче (3.I)-(3.2), а при $\sigma > 2$ аналогично задаче (2.I)-(2.2) из предыдущей главы.

Пусть $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_k < \ldots$ - упорядоченное множество всех неотрицательных чисел вида $\sigma_i = p\ell + m$, где ℓ и m - целые числа. Для заданного положительного числа ω мы построим приближенное решение $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ задачи (3.I)-(3.2) вида:

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{K_1} \varepsilon^{\sigma_i} w_i(x) + \sum_{m=0}^{K_2} \varepsilon^{\sigma_m} v_m(\varepsilon, x),$$

такое, что

$$\| u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x) \|_{W^1_p(G)} \leq C\varepsilon^\omega.$$

Для построения функции $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ мы определим вначале, не заботясь о выполнении граничных условий (3.2), функцию

$$\bar{w}(x) = \sum_{i=0}^{K} \varepsilon^{\sigma_i} w_i(x) ;$$

где целое число K и функции $w_i(x) \in C^2(\bar{G})$ выбраны так, что

$\mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w}) = \varepsilon^{\nu} h_1(\varepsilon, x)$,

$|h_1(\varepsilon,x)| \leq C$ при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $x \in \bar{G}$, $\nu = \frac{\omega+1}{2} p$.

Поскольку $\bar{w}(x)$ не удовлетворяет, вообще говоря, граничным условиям, мы построили затем функцию

$$\bar{v}(\varepsilon,x) = \sum_{m=0}^{K} \varepsilon^{\sigma_m} v_m(\varepsilon,x) ,$$

где $v_m(\varepsilon,x)$ имеет характер пограничного слоя в окрестности Γ, $\|v_m(\varepsilon,x)\| \sim \varepsilon^{\frac{1-p}{p}}$, причем

$$(\bar{w}(x) + \bar{v}(\varepsilon,x))\big|_\Gamma = 0 \tag{3.5}$$

и

$$\mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w}+\bar{v}) - \mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w}) = \varepsilon^{\nu} h_2(\varepsilon,x) , \tag{3.6}$$

$|h_2(\varepsilon,x)| \leq C$ при $x \in G$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Если функции $\bar{w}(x)$ и $\bar{v}(\varepsilon,x)$ с указанными свойствами построены, то

$$2^{1-p}\varepsilon^p \|u_\varepsilon - (\bar{w}+\bar{v})\|^p_{W^1_p(G)} + \alpha^2 \|u_\varepsilon - (\bar{w}+\bar{v})\|^2_{L_2(G)} \leq$$

$$\leq \varepsilon^p \sum_{i=1}^{n} \int_G \left[\Lambda_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_\varepsilon\right) - \Lambda_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{w}+\bar{v})\right)\right] \frac{\partial}{\partial x_i}(u_\varepsilon - (\bar{w}+\bar{v}))\, dx +$$

$$+ \int_G \left[F(x,u_\varepsilon) - F(x,\bar{w}+\bar{v})\right](u_\varepsilon - (\bar{w}+\bar{v}))\, dx =$$

$$= - \int_G \mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w}+\bar{v})[u_\varepsilon - (\bar{w}+\bar{v})]\, dx \leq$$

$$\leq C \|\mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w}+\bar{v})\|^2_{L_2(G)} + \alpha^2 \|u_\varepsilon - (\bar{w}+\bar{v})\|^2_{L_2(G)} .$$

Отсюда следует, что

$$\| u_\varepsilon - (\bar{w} + \bar{v}) \|_{W_p^1(G)} \leqslant C \varepsilon^{\omega}.$$

В частности, если K_1 - максимальное из чисел i, для которых $\sigma_i < \omega$, а K_2 - максимальное из чисел i, для которых $\sigma_i + \frac{1-p}{p} < \omega$, то справедлива оценка:

$$\| u_\varepsilon - \left(\sum_{i=0}^{K_1} \varepsilon^{\sigma_i} w_i(x) + \sum_{m=0}^{K_2} \varepsilon^{\sigma_m} v_m(\varepsilon, x) \right) \|_{W_p^1(G)} \leqslant C \varepsilon^{\omega}. \qquad (3.7)$$

3. Построение $\bar{w}(x)$. (Первый итерационный процесс.)

Для определения $w_i(x)$ мы разложим по степеням $\{\varepsilon^{\sigma_i}\}_{i=0}^{K+1}$ выражение $\mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w})$ и потребуем, чтобы обращались в нуль коэффициенты при ε^{σ_i} с $i \leqslant K$. Для того, чтобы установить вид такого разложения, мы докажем предварительно следующую лемму.

Пусть K - некоторое фиксированное положительное целое число. Будем обозначать $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{K+1})$ и для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{K+1})$ положим $|\alpha| = \sum_{i=1}^{K+1} \alpha_i$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, $(\sigma, \alpha) = \sum_{i=1}^{K+1} \sigma_i \alpha_i$. Для произвольного набора функций $z = (z_0(x), z_1(x), \ldots, z_K(x), z_{K+1}(x))$ введем обозначения :

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{K+1} \varepsilon^{\sigma_i} z_i ,$$

$$z^\alpha = z_1(x)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_K(x)^{\alpha_K} \cdot z_{K+1}(x)^{\alpha_{K+1}} .$$

Лемма 3.1. Пусть $f(x,u) \in C^{K+1}(\bar{G} \times R^1)$. Тогда имеет место разложение:

$$f(x,\bar{z}) = \bar{Q}^f(z) \equiv \sum_{i=0}^{K} \varepsilon^{\sigma_i} Q_i^f(z) + \varepsilon^{\sigma_{K+1}} Q_{K+1}^f(\varepsilon; z). \tag{3.8}$$

Здесь введены обозначения:

$$Q_0^f(z) = Q_0^f(z_0) = f(x, z_0) \tag{3.9}$$

$$Q_i^f(z) = Q_i^f(z_0, \dots, z_i) = \sum_{(\sigma,\alpha)=\sigma_i} \frac{1}{\alpha!} f_{|\alpha|}(x, z_0) z^\alpha =$$

$$= f_1(x, z_0) z_i + \tilde{Q}_i^f(z), \tag{3.10}$$

$$\tilde{Q}_i(z) = \tilde{Q}_i^f(z_0, \dots, z_{i-1}) = \sum_{\substack{(\sigma,\alpha)=\sigma_i \\ 2 \le |\alpha| \le i}} \frac{1}{\alpha!} f_{|\alpha|}(x, z_0) z^\alpha \tag{3.11}$$

для $1 \le i \le K$,

$$Q_{K+1}^f(\varepsilon, z) = Q_{K+1}^f(\varepsilon, z_0, \dots, z_{K+1}) = \sum_{(\sigma,\alpha) \ge \sigma_{K+1}} \varepsilon^{(\sigma,\alpha) - \sigma_{K+1}} \frac{1}{\alpha!} f_{|\alpha|}(x, z_0) z^\alpha +$$

$$+ \frac{1}{K!} \int_0^{\varepsilon^{-\sigma_1}(\bar{z} - z_0)} f_{K+1}(x, \varepsilon^{\sigma_1} t + z_0) \left[\varepsilon^{-\sigma_1}(\bar{z} - z_0) - t\right]^K dt, \tag{3.12}$$

$$f_K(x,u) \equiv \frac{\partial^K}{\partial u^K} f(x,u).$$

Доказательство. Применяя формулу Тейлора имеем:

$$f\left(x, z_0 + \sum_{i=1}^{K+1} \varepsilon^{\sigma_i} z_i\right) =$$

$$= \sum_{K=0}^{K} \frac{1}{K!} f_K(x, z_0) \left(\sum_{i=1}^{K} \varepsilon^{\sigma_i} z_i\right)^K + \frac{1}{K!} \int_{z_0}^{\bar{z}} f_{K+1}(x, \tau)(\bar{z} - \tau)^K d\tau. \tag{3.13}$$

Поскольку

$$\left(\sum_{i=1}^{K} \varepsilon^{\sigma_i} z_i\right)^K = \sum_{|\alpha|=K} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \varepsilon^{(\sigma,\alpha)} z^\alpha,$$

то, меняя в разложении (3.13) порядок суммирования, производя в интеграле замену $\tau = z_0 + \varepsilon^{\sigma_1} t$ и учитывая, что

$(K+1)\sigma_1 \geq \sigma_{K+1}$, получаем разложение (3.8).

Относительно функций $Q^{\ell}_i(z)$ и $\tilde{Q}_i^{\ell}(z)$ заметим следующее. Так как $(\sigma,\alpha) \geq |\alpha|\sigma_1 \geq \sigma_{|\alpha|}$, то суммирование в (3.10) идет лишь по таким мультииндексам α, что $|\alpha| \leq i$. Если при этом для некоторого j имеем $\alpha_j \geq K$, то $(\sigma,\alpha) \geq K\sigma_j$, то есть, суммирование в (3.10) идет лишь по таким α, что $\alpha_i \leq 1$, $\alpha_{i+1} = \ldots = \alpha_{K+1} = 0$, , а следовательно, $Q_i^{\ell}(z)$ зависит лишь от $z_0, z_1, \ldots, z_i$

Поскольку при $\alpha_i = 1$ и $|\alpha| \geq 2$ имеем $(\sigma,\alpha) > \sigma_i$, то суммирование в (3.11) ведется лишь по мультииндексам α с $\alpha_i = 0$, , то есть $\tilde{Q}_i^{\ell}(z)$ зависит только от $z_0, z_1, \ldots, z_{i-1}$.

Лемма 3.1 доказана.

Если теперь $\Lambda_p(z) \in C^{K-1}(R^1)$, $\mathcal{F}(x,u) \in C^{K+1}(\bar{G} \times R^1)$, $\bar{w} = \sum_{i=1}^{K} \varepsilon^{\sigma_i} w_i(x)$, то используя лемму 3.1, получаем разложение:

$$\mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w}) = \mathcal{F}(x,w_0) + \sum_{i=1}^{K} \varepsilon^{\sigma_i}\left[\mathcal{F}_1(x,w_0)w_i + S_i(w)\right] + \varepsilon^{\sigma_{K+1}} S_{K+1}(\varepsilon,w). \tag{3.14}$$

Здесь

$$\tilde{S}_1(w) = \tilde{Q}_1^{\mathcal{F}}(w) = \tilde{Q}_1^{\mathcal{F}}(w_0);$$

$$\tilde{S}_i(w) = \tilde{S}_i(w_0,\ldots,w_{i-1}) = \tilde{Q}_i^{\mathcal{F}}(w) - \Delta w_{\ell(i)}$$

для таких i, что $\sigma_i < p$;

$$\tilde{S}_i(w) = \tilde{S}_i(w_0,\ldots,w_{i-1}) = \tilde{Q}_i^{\mathcal{F}}(w) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} Q^{\Lambda_p}_{m(i)}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) - \Delta w_{\ell(i)}$$

для таких i, что $p \leq \sigma_i \leq \sigma_K$;

$$S_{K+1}(\varepsilon;w) = Q^{\mathcal{F}}_{K+1}(\varepsilon,w) - \sum_{i=m(K+1)}^{K-2} \varepsilon^{\sigma_i+p-\sigma_{K+1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} Q_i^{\Lambda_p}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) -$$

$$- \varepsilon^{\sigma_{K-1}+p-\sigma_{K+1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} Q^{\Lambda_p}_{K-1}\left(\varepsilon, \frac{\partial w}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=\ell(K+1)}^{K} \varepsilon^{\sigma_i+2-\sigma_{K+1}} \Delta w_i,$$

где индексы $m(j)$ и $\ell(j)$ определяются из равенств $\sigma_{m(j)}+p=\sigma_j$ и $\sigma_{\ell(i)}+2=\sigma_i$ соответственно.

Из разложения (3.14) следует, что условие (3.4) будет выполнено, если $w_i(x)\in C^2(\bar G)$ при $i=0,\dots,K$ и удовлетворены уравнения:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x,w_0)=0 \\ \mathcal{F}_1(x,w_0)w_i+\tilde S_i(w_0,\dots,w_{i-1})=0, \quad i=1,\dots,K. \end{cases} \tag{3.15}$$

В силу условия (3.3), уравнение (3.15) имеет решение $w_0(x)\in C^{K+2}(\bar G)$, если $\mathcal{F}(x,u)\in C^{K+2}(\bar G\times R^1)$, а решения остальных уравнений определяются равенствами

$$w_i(x)=-\frac{\tilde S_i(w_0,\dots,w_{i-1})}{\mathcal{F}_1(x,w_0)}. \tag{3.16}$$

При этом, так как $\tilde S_1(w)=\tilde S_1(w_0)\in C^{K+2}(\bar G)$, то $w_1(x)\in C^{K+2}(\bar G)$. Далее заметим, что $m(i)\leqslant i-2$ и $\ell(i)\leqslant i-2$, то есть $\tilde S_i(w)$ может содержать производные лишь от функций $w_0,\dots,w_{i-2}$. Следовательно, если $\Lambda_p(\tau)\in C^{K+2}(R^1)$, то для функций, определяемых равенствами (3.16), имеем:

$$w_i(x)\in C^{K+2-2[\frac{i}{2}]}(\bar G),$$

то есть, в частности, $w_i(x)\in C^2(G)$ при $i=0,1,\dots,K$ и $|S_{K+1}(\varepsilon;w)|\leqslant C$ при $x\in\bar G$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Таким образом, доказана лемма.

<u>Лемма 3.2.</u> Пусть $\Lambda_p(\tau)\in C^{K+2}(R^1)$ и $\mathcal{F}(x,u)\in C^{K+2}(\bar G\times R^1)$, где K таково, что $\sigma_{K+1}\geqslant\nu$. Пусть функции $w_0(x),\dots,w_K(x)$ определены из уравнений (3.15), (3.16). Тогда $w_i(x)\in C^{K+2-2[\frac{i}{2}]}(\bar G)$ и

$$\mathcal{M}_\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{K}\varepsilon^{\sigma_i}w_i(x)\right)=\varepsilon^{\nu}h_1(\varepsilon,x),$$

где $|h_1(\varepsilon,x)|\leqslant C$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $x\in\bar{G}$.

4. Построение $\bar{v}(\varepsilon,x)$. (Второй итерационный процесс.)

Пусть целое число K таково, что $\sigma_{K+1}\geqslant\nu$. Мы предположим, что в окрестности Γ^K_{3s}, введенной в § 3 главы I, функции $v_m(\varepsilon,x)$ имеют вид $v_m(\varepsilon,x)=z_m(\frac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi)$, то есть

$$\bar{v}(\varepsilon,x)=\sum_{m=0}^{K}\varepsilon^{\sigma_m}v_m(\varepsilon,x)=\sum_{m=0}^{K}\varepsilon^{\sigma_m}z_m(t,\varphi)=\bar{z}(t,\varphi),$$

где $t=\frac{1}{\varepsilon}\rho$. Для определения функций $z_m(t,\varphi)$ мы получим разложение:

$$\mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w}+\bar{z})-\mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w})=\sum_{m=0}^{K}\varepsilon^{\sigma_m}R_m(z)+\varepsilon^{\sigma_{K+1}}R_{K+1}(\varepsilon;z) \tag{3.17}$$

и потребуем обращения в нуль коэффициентов при ε^{σ_m} с $m\leqslant K$. Это даст нам уравнения

$$R_m(z)=0,\qquad m=0,1,\dots,K \tag{3.18}$$

для определения функций $z_m(t,\varphi)$. Условие (3.5) и условие убывания погранслоев $v_m(\varepsilon,x)$ во внутренних точках области G при $\varepsilon\to0^+$ дадут нам граничные условия для функций $z_m(t,\varphi)$:

$$z_m(t,\varphi)\Big|_{t=0}=-w_m(x(0,\varphi)),\quad \lim_{t\to+\infty}z_i(t,\varphi)=0. \tag{3.19}$$

Для того, чтобы получить разложение (3.17), мы предположим, что (аналогично линейному случаю (см. [7])) функции $z_m(t,\varphi)$ и их первые и вторые производные экспоненциально убывают при $t\to+\infty$. В § 2 этой главы будет показано, что возникающие при этом задачи, для определения функций $z_m(t,\varphi)$ имеют реше-

ния с такими свойствами. Это будет оправдывать сделанные предположения.

Лемма 3.3. Пусть функции $z_0(t,\varphi), \dots, z_K(t,\varphi)$ таковы, что $z_m(t,\varphi), \frac{\partial^2}{\partial t^2} z_m(t,\varphi) \in C^{K+2-i}(R^+ \times \Phi)$,

причем сами функции и их первые и вторые производные экспоненциально убывают при $t \to +\infty$. Пусть функции $\Lambda_p(u)$ и $\mathcal{F}(x,u)$ принадлежат классу C^{K+3}, а граница Γ классу C^{K+4}.

Тогда имеет место разложение (3.17), где

$$R_0(z) = -\delta_1(\varphi)\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_p\left(\frac{\partial z_0}{\partial t}\right) - \delta_2(\varphi)\frac{\partial^2 z_0}{\partial t^2} + \\ + \mathcal{F}\left(x(0,\varphi), z_0 + w_0(x(0,\varphi))\right); \tag{3.20}$$

$$R_m(z) = -\delta_1(\varphi)\frac{\partial}{\partial t}\left[\Lambda_p'\left(\frac{\partial z_0}{\partial t}\right)\frac{\partial z_m}{\partial t}\right] - \delta_2(\varphi)\frac{\partial^2 z_m}{\partial t^2} + \\ + \mathcal{F}_1\left(x(0,\varphi), z_0 + w_0(x(0,\varphi))\right) z_m - f_m(t,\varphi); \tag{3.21}$$

$$\delta_1(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} |C_{0i}(0,\varphi)|^p \geq \delta^2 > 0, \quad \delta_2(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} |C_{0i}(0,\varphi)|^2 \geq \delta^2 > 0$$

(функции $C_{ji}(\rho,\varphi)$ определены в § 3 главы I);

$f_m(t,\varphi) \in C^{K+3-m}(R^+ \times \Phi)$ – экспоненциально убывающие вместе со своими производными при $t \to +\infty$ функции, выражающиеся через $z_0(t,\varphi), \dots, z_{m-1}(t,\varphi)$ и их первые и вторые производные;

$$|R_{K+1}(\varepsilon; z(t,\varphi))| \leq C \quad \text{при } \varepsilon \in (0,\varepsilon_0],\ (t,\varphi) \in \Gamma_{3S}^K. \tag{3.22}$$

Доказательство.

Используя формулу Тейлора, мы получаем в Γ_{3S}^K разложения:

$$C_{ji}(\varepsilon t,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{K+1} \varepsilon^\ell t^\ell C_{ji\ell};$$

$$\mathcal{F}(x(\varepsilon t,\varphi),u)=\sum_{\ell=0}^{K+1}\varepsilon^{\ell}t^{\ell}\mathcal{F}^{\ell}(u,\varphi)\ ;$$

$$\bar{w}(x(\varepsilon t,\varphi))=\sum_{j=0}^{K}\varepsilon^{\sigma_j}w_j(x(\varepsilon t,\varphi))=\sum_{i=0}^{K+1}\varepsilon^{\sigma_i}z_i(t,\varphi)\ ;$$

где

$$C_{ji\ell}=C_{ji\ell}(\varphi)=\frac{1}{\ell!}\frac{\partial^{\ell}}{\partial\rho^{\ell}}C_{ji}(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=0}\in C^{K+3-\ell}(\Phi)\ ;$$

$$\mathcal{F}^{\ell}(u,\varphi)=\frac{1}{\ell!}\frac{\partial^{\ell}}{\partial\rho^{\ell}}\mathcal{F}(x(\rho,\varphi),u)\Big|_{\rho=0}\in C^{K+3-\ell}(R^1\times\Phi)\ ;$$

$$z_i(t,\varphi)=\sum_{\sigma_j+\ell=\sigma_i}\frac{1}{\ell!}t^{\ell}\frac{\partial^{\ell}}{\partial\rho^{\ell}}w_j(x(\rho,\varphi))\Big|_{\rho=0}$$

- полиномы степени не выше i по t, коэффициенты которых не менее чем $K+3-i$ раз непрерывно дифференцируемы по φ;

$|C_{ji\,K+1}(\varepsilon;\varphi)|\leq C$, $\quad|\mathcal{F}^{K+1}(\varepsilon;u,\varphi)|\leq C$,

$|z_{K+1}(\varepsilon;t,\varphi)|\leq Ct^{K+1}$

при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $(t,\varphi)\in\Gamma_{3S}^{K}$, $|u|\leq C$.

Пусть $z=(z_0(t,\varphi),\dots,z_K(t,\varphi),z_{K+1}(\varepsilon,t,\varphi))$, $\bar{z}=\sum_{i=0}^{K+1}\varepsilon^{\sigma_i}z_i$. Используя лемму 3.1, мы получаем, что

$$\mathcal{F}^{\ell}(\bar{z},\varphi)=\sum_{i=0}^{K-\ell}\varepsilon^{\sigma_i}Q_i^{\ell}(z)+\varepsilon^{\sigma_{K+1-\ell}}Q^{\ell}_{K+1-\ell}(\varepsilon;z),$$

где $Q_i^{\ell}(z)=Q_i^{\mathcal{F}^{\ell}}(z_0,\dots,z_i)$ при $0\leq i\leq K-\ell$,

$Q^{\ell}_{K+1-\ell}(\varepsilon;z)=Q^{\mathcal{F}^{\ell}}_{K+1-\ell}(\varepsilon;z_0,\dots,z_{K+1-\ell})$.

Поэтому

$$\mathcal{F}(x,\bar{z})=\sum_{\ell=0}^{K+1}\varepsilon^{\ell}t^{\ell}\mathcal{F}^{\ell}(\bar{z},\varphi)=\sum_{i=0}^{K+1}\varepsilon^{\sigma_i}T_i(z),$$

где

$$T_i(z)=T_i(z_0,\dots,z_i)=\sum_{\ell+\sigma_j=\sigma_i}t^{\ell}Q_j^{\ell}(z)\qquad(3.33)$$

и не зависит от ε при $0\leq i\leq K$, поскольку $\sigma_{K+1-\ell}+\ell\geq\sigma_{K+1}$,

то есть, в сумму в (3. 33) входят лишь функции

$$Q_j^{\ell}(\tau) = Q_j^{\ell}(\tau_0, \ldots, \tau_j) \quad \text{с} \quad j \leq K-\ell ;$$

$$T_{K+1}(\varepsilon;\tau) = \sum_{\substack{\ell+\sigma_j \geq \sigma_{K+1} \\ \ell > K+1 \\ j \leq K+1-\ell}} \varepsilon^{\ell+\sigma_j-\sigma_{K+1}} t^{\ell} Q_i^{\ell}(\tau) \tag{3.34}$$

Далее мы заметим, что

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\tau} = C_{0i}(\varepsilon t, \varphi) \frac{\partial}{\partial t} \bar{\tau} + \varepsilon \sum_{j=1}^{n-1} C_{ji}(\varepsilon t, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \bar{\tau} =$$

$$= \left(\sum_{\ell=0}^{K+1} \varepsilon^{\ell} t^{\ell} C_{0j\ell} \right) \left(\sum_{K=0}^{K+1} \varepsilon^{\sigma_K} \frac{\partial}{\partial t} \tau_K \right) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\ell=0}^{K+1} \varepsilon^{\ell} t^{\ell} C_{ji\ell} \right) \left(\sum_{K=0}^{K+1} \varepsilon^{\sigma_K} \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \tau_K \right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{K} \varepsilon^{\sigma_m} P_m^i(\tau) + \varepsilon^{\sigma_{K+1}} P_{K+1}^i(\varepsilon;\tau) ,$$

где введены обозначения:

$$P_0^i(\tau) = C_{0i0} \frac{\partial}{\partial t} \tau_0 = C_{0i}(0,\varphi) \frac{\partial \tau_0}{\partial t} , \tag{3.35}$$

$$P_m^i(\tau) = \sum_{\ell+\sigma_K=\sigma_m} t^{\ell} C_{0i\ell}(\varphi) \frac{\partial \tau_K}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\ell+1+\sigma_K=\sigma_m} t^{\ell} C_{ji\ell}(\varphi) \frac{\partial \tau_K}{\partial \varphi_j} , \tag{3.36}$$

для $1 \leq m \leq K$

$$P_{K+1}^i(\varepsilon,\tau) = \sum_{\ell+\sigma_K \geq \sigma_{K+1}} \varepsilon^{\ell+\sigma_K-\sigma_{K+1}} t^{\ell} C_{0i\ell} \frac{\partial \tau_K}{\partial t} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell+1+\sigma_K \geq \sigma_{K+1}} \varepsilon^{\ell+1+\sigma_K-\sigma_{K+1}} t^{\ell} C_{ji\ell} \frac{\partial \tau_K}{\partial \varphi_j}$$

Используя введенные обозначения, мы можем записать коэффициенты $R_m(\tau)$ в разложении (3.17) в виде:

$$R_m(\tau) = -\sum_{i=1}^{n} P_m^i \left(Q^{\Lambda_p}(P^i(\tau+z)) - Q^{\Lambda_p}(P^i(z)) + P^i(\tau) \right) + \tag{3.37}$$

$$+ T_m(\tau+z) - T_m(z) \qquad \text{для} \quad 0 \leq m \leq K ;$$

$$R_{K+1}(\varepsilon,\tau) = -\sum_{i=1}^{n} P_{K+1}^i \left(\varepsilon ; Q^{\Lambda_p}(P^i(\tau+z)) - Q^{\Lambda_p}(P^i(z)) + P^i(\tau) \right) + \tag{3.38}$$

$$+ T_{K+1}(\varepsilon ; \tau+z) - T_{K+1}(\varepsilon ; z) ,$$

где $\tau = (\tau_0, \ldots, \tau_{K+1})$, $z = (z_0, \ldots, z_{K+1})$, $P^i = (P_0^i, \ldots, P_{K+1}^i)$, $Q^{\Lambda_p} = (Q_0^{\Lambda_p}, \ldots, Q_{K+1}^{\Lambda_p})$.

Учитывая экспоненциальное убывание при $t \to +\infty$ функций $\tau_m(t,\varphi)$ и их производных, а также не более чем степенной рост по u производных функций $\Lambda_p(u)$ и $\mathcal{F}(x,u)$, мы получаем с помощью леммы Адамара (см., например, [28]), что функции

$$Q_j^{\ell}(\tau+z) - Q_j^{\ell}(z) \qquad \text{и} \qquad Q_j^{\Lambda_p}(P^i(\tau+z)) - Q_j^{\Lambda_p}(P^i(z))$$

экспоненциально убывают со своими первыми производными. Поэтому из равенств (3.10), (3.12), (3.33), (3.34), (3.35), (3.36), (3.38) следует, что для функции $R_{K+1}(\varepsilon ; \tau(t,\varphi))$ справедлива оценка (3.22).

Поскольку $z_0(t,\varphi) = z_0(\varphi) = w_0(x(0,\varphi))$, то из соотношений (3.9), (3.33), (3.35) вытекает справедливость равенства (3.20).

Рассмотрим теперь более подробно выражение (3.37) при $1 \leq m \leq K$. Из равенств (3.33) и (3.36) следует, что

$$T_m(\tau) = \mathcal{F}_1(\tau_0,\varphi)\tau_m + \tilde{T}_m(\tau_0, \ldots, \tau_{m-1}) ,$$

$$P_m^i(\tau) = C_{0i}(0,\varphi)\frac{\partial \tau_m}{\partial t} + \tilde{P}_m^i(\tau_0, \ldots, \tau_{m-1}) ,$$

где

$$\tilde{T}_m(z) = \sum_{\substack{\ell+\sigma_j=\sigma_m \\ j\le m-1}} t^\ell Q^\ell_j(z) ,$$

$$\tilde{P}^i_m(z) = \sum_{\substack{\ell+\sigma_k=\sigma_m \\ k\le m-1}} t^\ell c_{0i\ell}\frac{\partial z_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\ell+1+\sigma_k=\sigma_m} t^\ell c_{ji\ell}\frac{\partial z_k}{\partial \varphi_j} . \qquad (3.39)$$

Поэтому, применяя полученные выше соотношения, получаем для $R_m(z)$ равенство (3.2I), где

$$\begin{aligned} f_m(t,\varphi) = -\sum_{i=1}^{n}\Big\{ & c_{0i}(0,\varphi)\frac{\partial}{\partial t}\Big[\Lambda'_p(P^i_0(z))\tilde{P}^i_m(z) + \tilde{P}^i_m(z) + \tilde{Q}^{\Lambda_p}_m(P^i(z+z)) - \tilde{Q}^{\Lambda_p}_m(P^i(z))\Big] + \\ & + \tilde{P}^i_m\big(Q^{\Lambda_p}(P^i(z+z)) - Q^{\Lambda_p}(P^i(z)) + P^i(z)\Big\} + \\ & + \Big[F^0_1(z_0+z_0,\varphi) - F^0_1(z_0,\varphi)\Big] z_m + \tilde{T}_m(z+z) - \tilde{T}_m(z) . \end{aligned} \qquad (3.40)$$

Из последнего равенства видно, что функции $f_m(t,\varphi)$ определяются лишь значениями функций $z_0(t,\varphi),\dots,z_{m-1}(t,\varphi)$ и их производных. При этом, так как функции $z_m(t,\varphi)$ и их производные экспоненциально убывают при $t\to+\infty$, а функции $\Lambda_p(u)$ и $F_k(x,u)$ имеют не более чем степенной рост по u, то, применяя лемму Адамара, получаем, что функции $f_m(t,\varphi)$ и их производные экспоненциально убывают при $t\to+\infty$.

Покажем, что в правую часть равенства (3.40) не входят производные $\dfrac{\partial^2 z_{m-1}}{\partial\varphi_j\partial\varphi_k}$. Если $\sigma_m-\sigma_{m-1}<1$, то это утверждение следует из равенства (3.39), которое показывает, что в этом случае выражение $\tilde{P}^i_m(z)$ не содержит производных $\dfrac{\partial z_{m-1}}{\partial\varphi_k}$. Если $\sigma_m-\sigma_{m-1}=1$, то из равенства (3.39) получаем, что

$$\tilde{P}^i_m(z) = \sum_{j=1}^{n-1} c_{ji0}\frac{\partial z_{m-1}}{\partial\varphi_j} + \hat{P}^i_m(z) ,$$

где $\hat{P}^i_m(z)$ не содержит производных $\frac{\partial z_{m-1}}{\partial \varphi_K}$ Поэтому

$$\tilde{P}^i_m(Q^{\Lambda_p}(P^i(z))) = \sum_{j=1}^{n-1} C_{jio} \frac{\partial}{\partial \varphi_j} Q^{\Lambda_p}_{m-1}(P^i(z)) + \hat{P}^i_m(Q^{\Lambda_p}(P^i(z))) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} C_{jio} \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \left[\Lambda'_p(P^i_0(z)) \left(C_{0i}(0,\varphi) \frac{\partial z_{m-1}}{\partial t} + \tilde{P}_{m-1}(z) \right) + \tilde{Q}^{\Lambda_p}_{m-1}(P^i(z)) \right] +$$

$$+ \hat{P}^i_m(Q^{\Lambda_p}(P^i(z))),$$

откуда видно, что правая часть равенства (3.40) не зависит от $\frac{\partial^2 z_{m-1}}{\partial \varphi_j \partial \varphi_K}$. Это показывает, что $f_m(t,\varphi) \in C^{K+3-m}(R^+ \times \Phi)$, если функции $z_m(t,\varphi)$ имеют оговоренную в условиях леммы гладкость.

Лемма 3.3. доказана.

Пусть теперь функции $z^K_m(t,\varphi^K)$, определенные в окрестности Γ^K_{3S}, обладают указанными в условии леммы 3.3 свойствами.

Положим

$$v_m(\varepsilon,x) = \begin{cases} z^K_m\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho, \varphi^K\right) \eta(\rho) & \text{в } \Gamma^K_{3S}, \\ 0 & \text{в } G \setminus \bigcup_{K=1}^{N} \Gamma^K_{3S}, \end{cases} \qquad (3.41)$$

где срезающая функция $\eta(\rho)$ была введена в § 5 главы I.

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы I.6, показывается, что $\| v_m(\varepsilon,x) \|_{W^1_p(G)} \leq C \varepsilon^{\frac{1-p}{p}}$.

<u>Лемма 3.4.</u> Пусть функции $z_0(t,\varphi), \ldots, z_K(t,\varphi)$ удовлетворяют условиям леммы 3.3 и являются решениями задач (3.18)-(3.19), где выражения $R_m(z)$ определены равенствами (3.20) и (3.21). Пусть функции $v_m(\varepsilon,x)$ определены по формуле (3.41).

Тогда функция $\bar{v}(\varepsilon,x) = \sum_{m=0}^{K} \varepsilon^{\sigma_m} v_m(\varepsilon,x)$ удовлетворяет условиям (3.5) и (3.6).

Доказательство.

Так как функции $z_m(t,\varphi)$ удовлетворяют условию (3.19), то равенство (3.5) выполнено.

В области $G \setminus \operatorname{supp}_x \bar{v}(\varepsilon,x)$: $\mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w}+\bar{v}) - \mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w}) = 0$.

В окрестности Γ_s^K имеем $\bar{v}(\varepsilon,x) = \bar{z}(t,\varphi)$ и, согласно лемме 3.3,

$$\left|\mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w}+\bar{v}) - \mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w})\right| = \varepsilon^{\sigma_{K+1}} \left| R_{K+1}(\varepsilon; z(t,\varphi))\right| \leq C\varepsilon^{\nu}.$$

Наконец, в области $\Gamma_{2s}^K \setminus \Gamma_s^K$, в силу экспоненциального убывания функций $z_m(t,\varphi)$ и их производных, имеем $\left|\mathcal{D}_x^\alpha \bar{v}(\varepsilon,x)\right| \leq \frac{C}{\varepsilon^2} e^{-d\frac{s}{\varepsilon}}$, где $d>0$. Поэтому для произвольного числа H справедлива оценка

$$\left|\mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w}+\bar{v}) - \mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w})\right| \leq C\varepsilon^H \quad \text{в } \Gamma_{2s}^K \setminus \Gamma_s^K.$$

Тем самым лемма 3.4 доказана.

Мы покажем в следующем параграфе, что задачи (3.18)-(3.19) однозначно разрешимы, причем их решения удовлетворяют условиям леммы 3.4.

Тогда из леммы 3.2, 3.4 и оценки (3.7) вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.1. Пусть число K таково, что $\sigma_{K+1} \geq \frac{\omega+1}{2}p$, а K_1 и K_2 - максимальные из чисел i, для которых $\sigma_i < \omega$ и $\sigma_i + \frac{1-p}{p} < \omega$, соответственно. Предположим, что $\Lambda_p(u) \in C^{K+3}(R^1)$, $\mathcal{F}(x,u) \in C^{K+3}(\bar{G}\times R^1)$ и граница Γ области G принадлежит классу C^{K+4}. Тогда решение $u_\varepsilon(x)$ задачи (3.1)-(3.2) представимо в виде:

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{K_1} \varepsilon^{\sigma_i} w_i(x) + \sum_{m=0}^{K_2} \varepsilon^{\sigma_m} v_m(\varepsilon,x) + \varepsilon^{\omega} h(\varepsilon,x).$$

Здесь $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_k < \ldots$ - упорядоченное множество всех неотрицательных чисел вида $\theta_i = p\ell + m$, где ℓ и m - целые числа;

$w_0(x)$ - решение вырожденного уравнения (3.15);

$w_i(x)$ - определяются по формулам (3.16);

$v_m(\varepsilon,x)$ - функции типа пограничного слоя, определенные равенством (3.41), где функции $z_m(t,\varphi)$ являются решениями краевых задач на полуоси $[0,\infty)$ для некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра;

$$\|h(\varepsilon,x)\|_{W_p^1(G)} \leq C\varepsilon^{\omega} \qquad \text{при} \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0],$$

константа C не зависит от ε.

§ 2. Разрешимость задач для определения погранслойных поправок

Мы покажем здесь, что задачи (3.18)-(3.19) имеют решения, удовлетворяющие условиям леммы 3.4.

Для функции $f(t,\varphi)$, определенной при $(t,\varphi) \in R^+ \times \Phi$, будем обозначать $\varkappa_t(f)$ ее строгий характеристический показатель (экспоненциальный тип):

$$\varkappa_t(f) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln|f(t,\varphi)|}{t},$$

если предел существует.

Введем в рассмотрение следующие классы функций:

$$\tilde{N}^k_{\sigma(\varphi)} = \left\{ f(t,\varphi) \in C^k(R^+\times\Phi) : \exists\, \varkappa_t(D^\alpha_{t,\varphi} f) \leq \sigma(\varphi) \text{ при } 0 \leq |\alpha| \leq k \right\}$$

$$N^k_{\sigma(\varphi)} = \left\{ f(t,\varphi) \in \tilde{N}^k_{\sigma(\varphi)} : \varkappa_t(f) = \sigma(\varphi) \right\}$$

Отметим некоторые свойства функций их этих Классов.

Лемма 3.5. Пусть $u(t,\varphi) \in \tilde{N}^{K}_{\sigma_1(\varphi)}$, $v(t,\varphi) \in \tilde{N}^{K}_{\sigma_2(\varphi)}$.

Тогда

а) $u(t,\varphi),\ v(t,\varphi) \in \tilde{N}^{K}_{\sigma_1(\varphi)+\sigma_2(\varphi)}$;

б) если $P_1(t,\varphi)$, $P_2(t,\varphi)$ – полиномы по t с коэффициентами из $C^K(\varphi)$, то

$$P_1(t,\varphi)\,u(t,\varphi) + P_2(t,\varphi)\,v(t,\varphi) \in \tilde{N}^{K}_{\max(\sigma_1(\varphi),\sigma_2(\varphi))};$$

$$\int_0^t u(\tau,\varphi)\,d\tau \in \tilde{N}^{K}_{\sigma_1(\varphi)} \qquad \text{при } \sigma_1(\varphi) \geq 0,$$

$$\int_t^{\infty} u(\tau,\varphi)\,d\tau \in \tilde{N}^{K}_{\sigma_1(\varphi)} \qquad \text{при } \sigma_1(\varphi) < 0;$$

г) если $u(t,\varphi) \in N^{K}_{\sigma_1(\varphi)}$ и $u(t,\varphi) \neq 0$, то $u^{-1}(t,\varphi) \in N^{K}_{-\sigma(\varphi)}$;

д) пусть функция $t(\tau,\varphi) \in N^{K}_{0}$ осуществляет при каждом фиксированном φ взаимно-однозначное отображение R^+ на себя, причем $t'_\tau(\tau,\varphi) \geq \delta^2 > 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} t'_\tau(\tau,\varphi) = a(\varphi) > 0$;

функция $f(t,\varphi)$ принадлежит классу $N^{K}_{\sigma(\varphi)}$ тогда и только тогда, когда функция $F(\tau,\varphi) \equiv f(t(\tau,\varphi),\varphi)$ принадлежит классу $N^{K}_{a(\varphi)\sigma(\varphi)}$.

Доказательство.

Доказательство свойств а)-г) аналогично доказательству этих свойств для функций $u(t)$, $v(t)$ одного переменного. Это доказательство имеется, например, в [29].

Остановимся лишь на доказательстве свойства д).

Заметим, что для производной функции $H(t,\varphi)$ имеем:

$$\varkappa_\tau(H(t(\tau,\varphi),\varphi)) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\ln|H(t(\tau,\varphi),\varphi)|}{\tau} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln|H(t,\varphi)|}{t} \cdot \lim_{\tau\to\infty} \frac{t(\tau,\varphi)}{\tau} = a(\varphi)\,\varkappa_t(H(t,\varphi)).$$

Поэтому, если $f(t,\varphi) \in N^{K}_{\sigma(\varphi)}$, то $\varkappa_{\tau}(F) = a(\varphi)\varkappa_{t}(f) = a(\varphi)\sigma(\varphi)$ и, рассматривая производные функции $F(\tau,\varphi)$ нетрудно видеть, что $\varkappa_{\tau}(D^{\alpha}F) \leq a(\varphi)\sigma(\varphi)$, то есть, $F(\tau,\varphi) \in N^{K}_{a(\varphi)\sigma(\varphi)}$.

Для доказательства обратного включения заметим, что $\varkappa_{t}(f) = \frac{1}{a(\varphi)}\varkappa_{\tau}(F) = \sigma(\varphi)$ и для $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ имеем:

$$D^{\alpha}_{\tau,\varphi} F(\tau,\varphi) = D^{\alpha}_{t,\varphi} f(t,\varphi)\Big|_{t=t(\tau,\varphi)} \cdot \left[t'_{\tau}(\tau,\varphi)\right]^{\alpha_0} + \dots ,$$

где точки заменяют члены, выражающиеся через производные функции $f(t,\varphi)$ порядка не выше $|\alpha|-1$. Учитывая, что $t'_{\tau}(\tau,\varphi) \neq 0$

$$\text{и} \quad \varkappa_{\tau}\left(D^{\alpha}_{t,\varphi} f(t,\varphi)\Big|_{t=t(\tau,\varphi)}\right) = a(\varphi)\varkappa_{t}\left(D^{\alpha}_{t,\varphi} f(t,\varphi)\right),$$

нетрудно теперь убедиться в справедливости оценки:

$$\varkappa_{t}\left(D^{\alpha}_{t,\varphi} f(t,\varphi)\right) \leq \sigma(\varphi).$$

Тем самым лемма 3.5 доказана.

<u>Теорема 3.2.</u> Пусть $\Lambda_p(z) \in C^{M+3}(R^1)$, $g(z,\varphi) \in C^{M+3}(R^1)$, причем $g(0,\varphi) = 0$, $g'_z(z,\varphi) \geq \alpha^2 > 0$. Пусть $z_0(\varphi)$, $\delta(\varphi) \in C^{M+2}(\varphi)$, $\delta(\varphi) \geq \delta_0 > 0$.

Тогда задача

$$\begin{cases} -\delta(\varphi)\dfrac{d}{dt}\Lambda_p\left(\dfrac{dz}{dt}\right) - \dfrac{d^2 z}{dt^2} + g(z,\varphi) = 0, & (3.43) \\ z(0,\varphi) = z_0(\varphi), \quad \lim\limits_{t\to+\infty} z(t,\varphi) = 0, & (3.44) \end{cases}$$

имеет единственное решение $z(t,\varphi)$. При этом

$$z(t,\varphi),\ z''_{tt}(t,\varphi) \in \tilde{N}^{M+2}_{-\gamma(\varphi)}, \quad \text{где } \gamma(\varphi) = \sqrt{g'_z(0,\varphi)}.$$

Доказательство.

При доказательстве леммы 2.2 было показано, что задача (3.43) -(3.44) имеет единственное решение, причем это решение удовлетворяет уравнению:

$$z'_t(t,\varphi) = -H(z,\varphi), \tag{3.45}$$

где функция $H(z,\varphi)$ определена равенствами:

$$H(z,\varphi) = \operatorname{sgn} z \cdot \sqrt{B(z,\varphi)}, \tag{3.46}$$

$$-\delta(\varphi)\frac{p-1}{p}B^{p/2} - \frac{1}{2}B + \int_0^z g(\tau,\varphi)\,d\tau = 0. \tag{3.47}$$

Из определения функции $H(z,\varphi)$ следует, что при указанной в условии леммы гладкости данных задачи (3.43)-(3.44) имеем $H(z,\varphi) \in C^{M+2}(R^1 \times \Phi)$.

Из теоремы о дифференцируемой зависимости решения задачи Коши от параметров (см., например, [28]) следует теперь, что решение $z(t,\varphi)$ задачи (3.33)-(3.34) принадлежит классу $C^{M+2}(R^1 \times \Phi)$ и, значит,

$$z''_{tt}(t,\varphi) = \frac{g(z,\varphi)}{\delta(\varphi)(p-1)|z(t,\varphi)|^{p-2}+1} \in C^{M+2}(R^1 \times \Phi). \tag{3.48}$$

Далее,

$$\varkappa_t(z(t,\varphi)) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln|z(t,\varphi)|}{t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{z'_t(t,\varphi)}{z(t,\varphi)} = -\lim_{z\to 0}\frac{H(z,\varphi)}{z}.$$

Из соотношений (3.46), (3.47) следует, что

$$\lim_{z\to 0}\frac{H(z,\varphi)}{z} = \lim_{z\to 0} \operatorname{sgn} z\,\frac{B'_z(z,\varphi)}{2\sqrt{B(z,\varphi)}} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \operatorname{sgn} z\,\frac{g(z,\varphi)}{2\left(\delta(\varphi)\frac{p-2}{2}B^{\frac{p-2}{2}} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{B}} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{g(z,\varphi)}{z}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z}{H(z,\varphi)},$$

то есть,

$$\varkappa_t(z(t,\varphi)) = \varkappa_t(z'_t(t,\varphi)) = -\lim_{z\to 0}\frac{H(z,\varphi)}{z} =$$
$$= -\sqrt{\lim_{z\to 0}\frac{g(z,\varphi)}{z}} = -\sqrt{g'_z(0,\varphi)} = -\gamma(\varphi).$$

Выписывая для производных $\frac{\partial}{\partial\varphi_k} z(t,\varphi)$ уравнения в вариациях, получаем как и при доказательстве леммы 2.2, что

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_k} z(t,\varphi) = \frac{\partial}{\partial\varphi_k} z_0(\varphi)\exp\left(\int_0^t H'_z(z(\tau,\varphi),\varphi)\,d\tau\right) +$$
$$+\int_0^t H'_{\varphi_k}(z(s,\varphi),\varphi)\exp\left(\int_s^t H'_z(z(\tau,\varphi),\varphi)\,d\tau\right)ds.$$

Поскольку $H'_{\varphi_k}(0,\varphi)=0$, то есть $|H'_{\varphi_k}(z(s,\varphi),\varphi)| \le C\,|z(s,\varphi)|$, то из последнего равенства, в силу леммы 3,5, следует, что

$$\varkappa_t(z'_{\varphi_k}(t,\varphi)) \le -\gamma(\varphi).$$

Далее из равенства (3.45) имеем:

$$\varkappa_t(z''_{tt}(t,\varphi)) = \varkappa_t(-H'_z(z,\varphi)\cdot z'_t(t,\varphi)) \le -\gamma(\varphi),$$
$$\varkappa_t(z''_{t\varphi_k}(t,\varphi)) = \varkappa_t(-H'_z(z,\varphi)\cdot z'_{\varphi_k}(t,\varphi) - H'_{\varphi_k}(z,\varphi)) \le -\gamma(\varphi).$$

Выписывая для производных $z''_{\varphi_k\varphi_j}(t,\varphi)$ уравнения в вариациях, получаем, аналогично тому, как была получена оценка для $z'_{\varphi_k}(t,\varphi)$, что $\varkappa_t(z''_{\varphi_k\varphi_j}(t,\varphi)) \le -\gamma(\varphi)$.

Точно также получаем последовательно, что $\varkappa_t(D^\alpha_{t,\varphi} z(t,\varphi)) \le \gamma(\varphi)$ при $|\alpha| \le M+2$, то есть $z(t,\varphi) \in N^{M+2}_{-\gamma(\varphi)}$ и, в силу равенства (3.48),

$$z''_{tt}(t,\varphi) \in N^{M+2}_{-\gamma(\varphi)}.$$

Теорема 3.2 доказана.

<u>Теорема 3.3.</u> Пусть $a(t,\varphi)$, $B(t,\varphi) \in N^K_0$; $1+a(t,\varphi)>0$, $B(t,\varphi)>0$. Пусть $\lim_{t\to\infty} a(t,\varphi)=0$, $\lim_{t\to+\infty} B(t,\varphi) = \beta^2(\varphi) \ge \gamma^2(\varphi) > 0$.

Тогда для любых $z_0(\varphi) \in C^K(\varphi)$ и $f(t,\varphi) \in N^K_{-\gamma(\varphi)}$ задача

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}\left[\left(1+a(t,\varphi)\right)\dfrac{dz}{dt}\right] + B(t,\varphi)z = f(t,\varphi), & (3.49) \\ z(0,\varphi) = z_0(\varphi), \quad \lim\limits_{t\to+\infty} z(t,\varphi) = 0, & (3.50) \end{cases}$$

имеет единственное решение $z(t,\varphi)$. При этом $z(t,\varphi),\ z''_{tt}(t,\varphi) \in N^K_{-\gamma(\varphi)}$.

<u>Доказательство.</u>

Заменой $\tau(t,\varphi) = \int\limits_0^{t\beta(\varphi)} \dfrac{ds}{1+a(s,\varphi)}$ задача (3.49)-(3.50) сводится к задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v}{d\tau^2} - \left[1+\omega(\tau,\varphi)\right]v = h(\tau,\varphi), & (3.51) \\ v(0,\varphi) = z_0(\varphi), \quad \lim\limits_{\tau\to+\infty} v(\tau,\varphi) = 0, & (3.52) \end{cases}$$

где

$v(\tau,\varphi) = z(t(\tau,\varphi),\varphi)$;

$h(\tau,\varphi) = -\dfrac{1}{\beta^2(\varphi)}\left(1+a(t(\tau,\varphi),\varphi)\right)f(t(\tau,\varphi),\varphi) \in N^K_{-\alpha(\varphi)/\beta(\varphi)}$;

$1+\omega(\tau,\varphi) = \dfrac{1}{\beta^2(\varphi)}\left(1+a(t(\tau,\varphi),\varphi)\right)B(t(\tau,\varphi),\varphi) > 0$, то есть

$\omega(\tau,\varphi) \in \tilde{N}^K_0$ и $\lim\limits_{\tau\to+\infty} \omega(\tau,\varphi) = 0$.

Рассматривая при фиксированном $\varphi \in \Phi$ задачу Коши для уравнения Риккати:

$$\frac{dP}{d\tau} + P^2 = 1+\omega(\tau,\varphi), \qquad P(0,\varphi) = q > 0,$$

легко видеть (см. [30] стр. 150), что ее решение определено при $\tau \in R^+$ и $\lim\limits_{\tau\to+\infty} P(\tau,\varphi) = 1$.

Аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 3.2, выписывая для производных функции $P(\tau,\varphi)$ уравнения в вариациях, убеждаемся в том, что

$$P(\tau,\varphi),\quad P'_\tau(\tau,\varphi) \in N^K_0(R^+\times\Phi).$$

Полагая далее,

$$\tilde{v}_+(\tau,\varphi) = \exp\int_0^\tau p(s,\varphi)\,ds, \qquad \tilde{v}_-(\tau,\varphi) = \tilde{v}_+(\tau,\varphi)\int_\tau^\infty \left[\tilde{v}_+(s,\varphi)\right]^{-2} ds,$$

мы получаем два линейно независимых решения однородного уравнения:

$$v''_{\tau\tau} - \left[1+\omega(\tau,\varphi)\right]v = 0$$

такие, что $\tilde{v}_+(\tau,\varphi),\ (\tilde{v}_+(\tau,\varphi))''_{\tau\tau} \in N_1^K$; $\tilde{v}_-(\tau,\varphi),\ (\tilde{v}_-(\tau,\varphi))''_{\tau\tau} \in N_{-1}^K$.

Пусть

$$v_+(\tau,\varphi) = \tilde{v}_+(\tau,\varphi) - \frac{\tilde{v}_-(\tau,\varphi)}{\tilde{v}_-(0,\varphi)}, \qquad v_-(\tau,\varphi) = \frac{\tilde{v}_-(\tau,\varphi)}{\tilde{v}_-(0,\varphi)},$$

$$G(\tau,s,\varphi) = \frac{1}{W(\varphi)}\begin{cases} v_-(\tau,\varphi)\,v_+(s,\varphi), & s<\tau, \\ v_+(\tau,\varphi)\,v_-(s,\varphi), & s>\tau, \end{cases}$$

где $W(\varphi)$ - определитель Вронского решений $v_+(\tau,\varphi)$, $v_-(\tau,\varphi)$. Тогда единственное решение задачи (3.51)-(3.52) дается равенством

$$v(\tau,\varphi) = z_0(\varphi)\,v_-(\tau,\varphi) + \int_0^\infty G(\tau,s,\varphi)\,h(s,\varphi)\,d\tau. \tag{3.53}$$

Из (3.53) видно, что $v(\tau,\varphi),\ v''_{\tau\tau}(\tau,\varphi) \in N^K_{-\alpha(\varphi)/\beta(\varphi)}$, и, следовательно, функция $z(t,\varphi) = v(\tau(t,\varphi),\varphi)$ является искомым решением задачи (3.49)-(3.50).

Теорема 3.2 доказана.

Теоремы 3.2 и 3.3 доказывают возможность выбора функций $z_0(t,\varphi),\dots,z_K(t,\varphi)$ так, чтобы выполнялись все условия леммы 3.4. Это завершает доказательство теоремы 3.1.

В заключение выражаю глубокую благодарность М.И. Вишику и Р.С. Гусаровой за постоянное внимание к работе.

Литература

[1] Вишик М.И. О разрешимости первой краевой задачи для нелинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений. ДАН СССР 134 № 4 (1960), 749-752 .

[2] Вишик М.И. Квазилинейные эллиптические системы уравнений, содержащие подчиненные члены. ДАН СССР 144 № 1 (1962), 13-16.

[3] Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений. Математический сборник т. 29(71) № 3, 1951, 615--676.

[4] Дубинский Ю.А. Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка. УМН т. 23 № 1(139), 1968, 45-90.

[5] Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., "Наука", 1972.

[6] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., "Мир", 1972.

[7] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. УМН, т. 12 № 5 (77), 1957, 3-122.

[8] Вишик М.И., Люстерник Л.А. О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. ДАН СССР, 132 № 6 (1960), 1242-1245.

[9] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Об асимптотике решения краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений. ДАН СССр, 121 № 5 (1958), 778-781.

[10] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими и быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями. УМН, 15 (1960) № 4 (94). 27-95.

[11] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и несамосопряженнных дифференциальных уравнений. УМН, 15 (1960), № 3, 3-80.

[12] Треногин В.А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вишика. УМН, т. 25 № 4, (1970), 123-156.

[13] Lions J.L. „Perturbatios Singuliézes dans les Problémes aux Limites et en Contrôle Optimal". Lect. Not. Math., 323, (1973).

[14] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., "Наука", 1973.

[15] Скрыпник И.В. Условие регулярности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка. Известия АН СССР, серия матем., 37 (1973), 1376-1427.

[16] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценка решений эллиптических уравнений вблизи границы. М., ИЛ, 1962.

[17] Nečas I., „Sur la regularite des solutions faibles des equation elliptiques non lineares". Comm. Math. Univ. Carol. 9, 3 (1968), 365-413.

[18] Олейник О.А. Об уравнениях эллиптического типа с малым параметром при старших производных. Матем. сб. 31 № 1 (1952), 104-117.

[19] Олейник О.А. О краевых задачах для уравнений с малым параметром при старших производных. ДАН СССР, 85, № 3 (1952), 493.

[20] Ильин А.М., Горьков Ю.П., Леликова Е.Ф. О методе сращивания асимптотических разложений. ДАН СССР, 1974, т. 217 № 5, 1033-1036.

[21] Ильин А.М., Горьков Ю.П., Леликова Е.Ф. Асимптотика ре-

шения эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных в окрестности особой характеристики предельного уравнения. Труды семинара им. И.Г. Петровского, вып. I, изд. МГУ, 1975.

[22]. Лионс Ж.-Л. Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения."Мир", М., 1971.

[23]. Бесов О.В., Ильин Б.П., Никольский С.М. "Интегральные представления функций и теоремы вложения". "Наука", М., 1975.

[24] Friedrichs K. „Asymptotic phenomena in mathematical physics", Bull. Amer. Math. Soc. 61, 6 (1955), 485-504. (перевод см.: Матем. I:2 (1957), 79-94).

[25] Коул Дж. "Методы возмущений в прикладной математике". М., "Мир", 1972.

[26] Ван-Дайк М., Методы возмущений в механике жидкости. М., "Мир", 1967.

[27] Арнольд В.И. "Обыкновенные дифференциальные уравнения" М., "Наука", 1971.

[28] Петровский И.Г. "Обыкновенные дифференциальные уравнения", М., "Наука", 1970.

[29] Демидович Б.П. "Лекции по математической теории устойчивости". М., "Наука", 1967.

[30] Беллман Р. "Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1954.

[31] Вазов В. "Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений",М.,"Мир",1968.

[32] Бутузов В.Ф.,Васильева А.Б.,Федорюк М.В. "Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений" "Итоги науки.Матем.анализ,1967" ВИНИТИ АН СССР,М.1969 .