Механико-математический факультет

На правах рукописи

ЛУНИН ВЛАДИМИР ЮРЬЕВИЧ

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

(01.01.02 - дифференциальные уравнения)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1976

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Научные руководители - профессор, доктор физико-математических наук М.И.ВИШИК, доцент, кандидат физико-математических наук Р.С.ГУСАРОВА.

Официальные оппоненты: профессор, член-корреспондент АН СССР Л.А.ЛЮСТЕРНИК, доцент, кандидат физико-математических наук А.М.ИЛЬИН.

Ведущее научно-исследовательское учреждение - Институт проблем механики АН СССР.

Защита состоится "____"_____197 года в "_____" часов на заседании специализированного совета № I по математике (Д-I3/52) при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова по адресу: Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория _____.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан "____"_____197 года.

Ученый секретарь
специализированного совета № I по математике
при МГУ
профессор /Ю.В.ЕГОРОВ/

Теория дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старших производных, является объектом исследований многих авторов. Этот интерес стимулируется потребностями ряда разделов физики и механики, где встречаются подобного рода уравнения. Различными авторами изучен широкий круг задач, связанных с сингулярными возмущениями, и предложены разнообразные методы решения таких задач.

В представленной диссертации рассматриваются краевые задачи для некоторых классов квазилинейных эллиптических уравнений, содержащих малый параметр при старших производных.

Диссертация состоит из трех глав.

В первой главе проводится построение главного члена $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ асимптотики решения $u_\varepsilon(x)$ задачи:

$$\varepsilon^p \mathcal{T}_{2m}(u) + \mathcal{T}_{2m-2}(u) = 0 \quad , \tag{I}$$

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial \vec{n}^s}\right|_\Gamma = 0 \quad , \quad s = 0, 1, \ldots, m-1 \quad . \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{T}_{2m}$ и $\mathcal{T}_{2m-2}$ – квазилинейные эллиптические операторы порядка $2m$ и $2m-2$ соответственно:

$$\mathcal{T}_{2m}(u) \equiv \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \quad , \tag{3}$$

$$\mathcal{T}_{2m-2}(u) \equiv \sum_{|\alpha| \le m-1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha(x, \delta u) \quad , \tag{4}$$

точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial G$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малый параметр; $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к границе Γ ;

$$D^\nu u = \frac{\partial^{|\nu|} u}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}} \quad , \text{ где } \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) , \ |\nu| = \sum_{i=1}^n \nu_i \quad ,$$

$$D^k u = \{ D^\nu u : |\nu| = k \} \quad \text{для целого } k \ , \ \delta u = \{ D^k u : 0 \le k \le m-1 \} .$$

В § I этой главы сделаны вводные замечания.

§ 2 посвящен формулировке условий, которые далее на протяжении всей работы предполагаются выполненными.

Относительно функций, входящих в выражения (3) и (4) предполагается, что A_α – один раз, а B_α – m раз непрерывно дифференцируемы по своим аргументам, причем

$$|A_\alpha(x,\xi,\eta)| \le C(1+|\xi|^{p-1}+|\eta|^{p-1}) \qquad \text{для } |\alpha|\le m,$$

$$|B_\alpha(x,\xi)| \le C(1+|\xi|^{q-1}) \qquad \text{для } |\alpha|\le m-1.$$

Здесь $p\ge 2$ и $2\le q\le p$ – фиксированные для данной задачи параметры, $\xi_\nu=\xi_{\nu_1,\dots,\nu_n}$, $\xi^k=\{\xi_\nu : |\nu|=k\}$ для целого k, $\xi=\{\xi^k : 0\le k\le m-1\}$, $\eta=\xi^m$.

Предполагается, что для $|\alpha|=m$ функции $A_\alpha(x,\xi,\eta)$ при больших $|\eta|$ ведут себя как однородные функции порядка $p-1$ по η. Точнее, предполагается, что для $|\alpha|=m$

$$A_\alpha(x,\xi,\eta)=a_\alpha(x,\xi)P_\alpha(\eta)+\widetilde{A}_\alpha(x,\xi,\eta),$$

где $a_\alpha(x,\xi)$ – функции класса C^m,

$$|\widetilde{A}_\alpha(x,\xi,\eta)| \le C(1+|\xi|^{p-1}+|\eta|^{p-1-\sigma}) \tag{5}$$

с константой $\sigma>0$,

$$P_\alpha(t\eta)=\operatorname{sgn}t\cdot|t|^{p-1}P_\alpha(t) \qquad \text{для } t\in\mathbb{R}^1.$$

Далее требуется, чтобы операторы $T_{2m}(u)$ и $T_{2m-2}(u)$ удовлетворяли условию сильной эллиптичности:

$$\sum_{|\alpha|\le m}\left[A_\alpha(x,\xi,\xi^m)-A_\alpha(x,\xi',\xi^{m\prime})\right](\xi_\alpha-\xi'_\alpha)\ge\gamma_0^2\sum_{|\alpha|=m}|\xi_\alpha-\xi'_\alpha|^p,$$

$$\sum_{|\alpha|\le m-1}\left[B_\alpha(x,\xi)-B_\alpha(x,\xi')\right](\xi_\alpha-\xi'_\alpha)\ge\gamma_1^2\sum_{|\alpha|=m-1}|\xi_\alpha-\xi'_\alpha|^q,$$

где $\gamma_0,\gamma_1>0$.

Эти условия обеспечивают существование и единственность решения задачи (I) – (2) в классе $\overset{\circ}{W}{}^m_p(G)$, а также существование и единственность решения вырожденной задачи:

$$\mathcal{T}_{2m-2}(u)=0\,,\ \frac{\partial^s u}{\partial \vec{n}^s}\Big|_\Gamma=0 \quad \text{для } s=0,\dots,m-2\,, \qquad (6)$$

в классе $\overset{\circ}{W}{}_q^{m-1}(G)$.

Предполагается еще, что оператор $\mathcal{T}_{2m-2}(u)$ удовлетворяет условиям:

<u>Условие А</u>. Существует константа $\gamma_2>0$ такая, что

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m-1} \frac{\partial B_\alpha(x,\xi)}{\partial \xi_\beta}\psi_\alpha\psi_\beta \geq \gamma_2^2 \sum_{|\alpha|=m-1}\psi_\alpha^2$$

для любого $\psi=\{\psi_\nu : |\nu|=m-1\}$.

<u>Условие В</u>. Вырожденная задача (6) имеет решение $u(x)\in C^m(\bar{G})\cap W_2^{m-1}(G)$.

Примером задачи, удовлетворяющей всем поставленным условиям, является задача:

$$\begin{cases} \varepsilon^p\Delta\left(|\Delta u|^{p-2}\Delta u\right)-\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\left[1+\sum\limits_{j=1}^n\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right]^{\frac{q-2}{2}}\right\}=f(x)\,, \\ u|_\Gamma=0\,,\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_\Gamma=0\,, \end{cases}$$

где $p\geq 2$, $2\leq q\leq p$, $f(x)\in C^3(G)$.

§ 3 первой главы начинается с рассмотрения случая, когда решение $u_0(x)\equiv h(x)$ вырожденной задачи (6) удовлетворяет всем граничным условиям (2), то есть $h(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^m(G)$. Доказывается

<u>Теорема I.I</u>. Пусть $u_\varepsilon(x)$ – решение задачи (I)–(2), а $h(x)$ – решение задачи (6), причем $h(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^m(G)\cap W_2^{m+1}(G)$.

Тогда

$$\|u_\varepsilon-h\|_{W_p^m(G)}\leq C\varepsilon\,,\quad \|u_\varepsilon-h\|_{W_q^{m-1}(G)}\leq C\varepsilon^{2p/q}\,,$$

где константы C не зависят от ε.

В общем случае, когда решение вырожденной задачи $h(x) \notin \overset{\circ}{W}{}_p^m(G)$ предполагается, что аналогично линейному случаю, главный член асимптотики решения задачи (I) – (2) имеет вид:

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = h(x) + \varepsilon^{m-1}\mathcal{U}(\varepsilon,x) + \varepsilon\Psi(\varepsilon,x) \ . \qquad (7)$$

Здесь $h(x)$ – решение вырожденной задачи (6); $\mathcal{U}(\varepsilon,x)$ – функция типа пограничного слоя такая, что

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial \vec{n}^{m-1}}\left(h(x) + \varepsilon^{m-1}\mathcal{U}(\varepsilon,x)\right)\Big|_\Gamma = 0 \ ;$$

$\Psi(\varepsilon,x)$ – гладкая функция, удовлетворяющая условиям:

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial \vec{n}^{m-1}}\Psi\Big|_\Gamma = 0 \ , \ \frac{\partial^s}{\partial \vec{n}^s}\tilde{u}_\varepsilon\Big|_\Gamma = 0 \quad \text{для} \quad s = 0,\dots,m-2 \ .$$

Для построения поправки $\mathcal{U}(\varepsilon,x)$ в окрестности границы вводятся локальные координаты (ρ,φ) так, что $\rho(x)$ – расстояние от точки $x \in G$ до границы вдоль нормали к границе, проходящей через эту точку, а $\varphi(x)$ – "угловая" координата точки пересечения этой нормали с границей. Затем делается регуляризующее растяжение $\rho = \varepsilon t$ и предполагается, что пограничный слой $\mathcal{U}(\varepsilon,x)$ в локальных координатах имеет вид: $\mathcal{U}(\varepsilon,x) = v(\frac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi)$.

Требуя, чтобы функция $v(t,\varphi)$ обращала в нуль старшие при $\varepsilon \to 0^+$ члены в разложении по степеням ε выражения $\varepsilon^p \mathcal{T}_{2m}(\tilde{u}_\varepsilon) + \mathcal{T}_{2m-2}(\tilde{u}_\varepsilon)$, мы получаем уравнение для определения функции $v(t,\varphi)$:

$$-\delta(\varphi)\frac{\partial^m}{\partial t^m}\Lambda_p\left(\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\right) + \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} g\left(\frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}, \varphi\right) = 0 \ . \qquad (8)$$

При этом должны выполняться условия:

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} v(t,\varphi)\Big|_{t=0} = \tau_0(\varphi) \equiv (-1)^m \frac{\partial^{m-1}}{\partial \vec{n}^{m-1}} h\Big|_{\Gamma}, \quad \lim_{t\to+\infty} v(t,\varphi) = 0. \quad (9)$$

Здесь $\delta(\varphi)>0$ и $g(\tau,\varphi)$ – функции, выражающиеся через функции A_α и B_α и элементы матрицы Якоби, соответствующей замене координат $(x_1,\dots,x_n)$ на $(\rho,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$, причем $g'_\tau(\tau,\varphi)\geq\gamma_6^2>0$; $\Lambda_p(\tau)=\tau|\tau|^{p-2}$.

В § 4 первой главы исследуется вопрос о разрешимости задачи (8) – (9) в случае $p>2$. Доказана следующая

<u>Теорема I.2</u>. Пусть $\delta(\varphi)$, $\tau_0(\varphi)\in C^m(\Phi)$;

$g(\tau,\varphi)\in C^m(\mathbb{R}^1\times\Phi)$, причем $\delta(\varphi)\geq\gamma^2>0$,

$g'_\tau(\tau,\varphi)\geq\gamma^2>0$.

Тогда при любом фиксированном φ задача (8) – (9) имеет единственное решение $v(t,\varphi)$ в классе $W_p^m(\mathbb{R}^+)$ такое, что $\operatorname{supp}_t v(t,\varphi)=[0,b(\varphi)]$, где $b(\varphi)\leq b_0<+\infty$.

Как функция n переменных $(t,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$ функция $v(t,\varphi)$ такова, что $v(t,\varphi)\in C^{\varkappa}(\mathbb{R}^+\times\Phi)\cap C^m(\mathbb{R}^+\times\Phi\setminus\mathcal{M})$ при $\varkappa<m-(m-1)\frac{2}{p}$, где $\mathcal{M}=\{(t,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\Phi : t=b(\varphi)\}$. При этом в области $\{(t,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\Phi : t<b(\varphi)\}$ справедливы оценки:

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k} D_\varphi^\alpha v(t,\varphi)\right| \leq C|\tau_0(\varphi)|^\nu,$$

где

$$\nu=\frac{2}{p}+\frac{p-2}{p}(m-k)-|\alpha|, \quad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}), \quad k+|\alpha|\leq m.$$

Кроме того, функция $\Lambda_p\left(\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\right)\in C^1(\mathbb{R}^+\times\Phi)$ и имеет место равенство:

$$-\delta(\varphi)\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_p\left(\frac{\partial^m v(t,\varphi)}{\partial t^m}\right)+g\left(\frac{\partial^{m-1}v(t,\varphi)}{\partial t^{m-1}},\varphi\right)-g(0,\varphi)=0 .$$

Подчеркнем, что в отличие от линейного случая, здесь погранслойная поправка имеет компактный носитель. Другим отличием от линейного случая является то, что функция $v(t,\varphi)$ при $p \geq 4$ имеет не более, чем m непрерывных производных, то есть задача (8) – (9) не имеет классических решений. Это связано с тем, что уравнение (8) вырождается в точках, где $\frac{\partial^m}{\partial t^m} v = 0$, и повышение гладкости данных задачи (8) – (9) не влечет за собой повышения гладкости функции $v(t,\varphi)$.

В § 5 первой главы строится главный член асимптотики решения задачи (I) – (2) по формуле (7).

Доказана следующая теорема.

<u>Теорема I.3.</u> Пусть $u_\varepsilon(x)$ – решение задачи (I) – (2), а функция $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ определена указанным выше образом.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\| u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x) \|_{W_p^m(G)} \leq C \varepsilon^{\frac{\varkappa}{p} + \frac{1-p}{p}}, \\ &\| u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x) \|_{W_q^{m-1}(G)} \leq C \varepsilon^{\frac{\varkappa}{q} + \frac{1}{q}}, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

где $\varkappa = \min\left(1, \frac{\sigma p}{p-1}\right)$, σ – константа из оценки (5), постоянные C не зависят от ε.

Поскольку $\| \varepsilon^{m-1} U(\varepsilon,x) \|_{W_p^m(G)} = O(\varepsilon^{(1-p)/p})$ и $\| \varepsilon^{m-1} U(\varepsilon,x) \|_{W_q^{m-1}(G)} = O(\varepsilon^{1/q})$, то оценки (10) показывают, что $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ является главным членом асимптотики решения задачи (I) – (2) при $\varepsilon \to 0^+$.

Во второй главе показывается, что в случае вырождения уравнения (I) второго порядка в алгебраическое уравнение, погрешность при замене решения задачи (I) – (2) главным членом его асимптотики равномерно в замкнутой области $\overline{G}$ мала при малых ε. Отметим, что при $n \geq 2$ этот факт не вытекает из оценок (10).

Изложение ведется на примере краевой задачи:

$$\mathcal{M}_\varepsilon(u) \equiv -\varepsilon^p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Lambda_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \mathcal{F}(x,u) = 0, \qquad (11)$$

$$u|_\Gamma = 0 \quad , \qquad (12)$$

где $\Lambda_p(\tau) = \tau|\tau|^{p-2}$, $p > n$, $p > 2$, $\mathcal{F}'_u(x,u) \geq \alpha^2 > 0$.

В соответствии с изложенным выше, главный член асимптотики решения задачи (9) – (10) имеет вид:

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = h(x) + \mathcal{U}(\varepsilon,x) \quad , \qquad (13)$$

где $\mathcal{U}(\varepsilon,x)$ – функция типа пограничного слоя, а $h(x) \equiv u_0(x)$ – решение вырожденного уравнения:

$$\mathcal{F}(x,u) = 0.$$

В § 1 второй главы доказывается принцип максимума для уравнения (11) в следующей форме.

<u>Лемма 2.1</u>. Пусть $u_\varepsilon(x)$ – решение задачи (11) – (12), а $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ – некоторое семейство функций из $C^2(\bar{G})$. Тогда

$$\max_{x\in\bar{G}} |u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x)| \leq \max\left(\frac{1}{\alpha^2}\max_{x\in\bar{G}}|\mathcal{M}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)|, \max_{x\in\partial G}|\tilde{u}_\varepsilon|\right).$$

В случае $p < 4$ применение леммы 2.1 к функции $\tilde{u}_\varepsilon(x)$, определенной равенством (13), дает сразу оценку погрешности в метрике $C(\bar{G})$, а именно доказана

<u>Теорема 2.1</u>. Пусть $u_\varepsilon(x)$ – решение задачи (11) – (12), а функция $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ определена равенством (13). Тогда

$$|u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon \qquad \text{при } \varepsilon \in (0,\varepsilon_0],\ x \in G,$$

где константа C не зависит от ε.

В § 2 второй главы показывается, что теорема 2.1 сохраняет силу при любом $p > n$.

Это делается следующим образом.

Поскольку в случае $p>4$ функция $\mathcal{U}(\varepsilon,x)$ не имеет требуемой в лемме 2.I гладкости, то принцип максимума применяется к вспомогательной функции $V_\mu(\varepsilon,x)$ определенной равенством:

$$V_\mu(\varepsilon,x)=\begin{cases}\chi\left(\frac{\tau_0(\varphi)}{\varepsilon}\right)w\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho,\varphi;\mu\right)\eta(\rho) & \text{при } \rho(x)\le 2S,\\ 0 \text{ при } \rho(x)>2S, \end{cases} \tag{I4}$$

где $\chi(\tau)$ и $\eta(\tau)$ – гладкие функции, такие, что $0\le\chi(\tau)\le 1$, $\chi(\tau)\equiv 0$ для $|\tau|\le 1$, $\chi(\tau)\equiv 1$ для $|\tau|\ge 2$; $\eta(\tau)\equiv 0$ для $\tau\ge 2S$, $\eta(\tau)\equiv 1$ для $\tau\le S$ (здесь $3S$ – ширина полоски, примыкающей к границе Γ, в которой определены координаты (ρ,φ)).

Здесь $w(t,\varphi;\mu)$ – решение краевой задачи для "регуляризованного" уравнения пограничного слоя:

$$-\delta(\varphi)\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_p\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+g(w,\varphi)=0, \tag{I5}$$

$$w(0,\varphi;\mu)=\tau_0(\varphi)\equiv -h|_\Gamma,\ \lim_{t\to+\infty}w(t,\varphi;\mu)=0, \tag{I6}$$

где $\mu=\varepsilon^{p-2}$.

Существование, единственность и оценки решения задачи (I5) – (I6) даются следующей теоремой.

<u>Теорема 2.2</u>. При любых фиксированных $\varphi\in\Phi$ и $\mu>0$ задача (I5) – (I6) имеет единственное в классе $W_p^1(R^+)$ решение.

Как функция n переменных $(t,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$ функция $w(t,\varphi;\mu)$ такова, что $w(t,\varphi;\mu)\in C^2(R^+\times\Phi)$ и справедливы оценки:

$$|w(t,\varphi;\mu)|\le|\tau_0(\varphi)|e^{-d^2t},\ d>0;$$

$$|w'_t(t,\varphi;\mu)|\le C|w(t,\varphi;\mu)|^{2/p},\ |w'_t(t,\varphi;\mu)|\le C\mu^{-1/2}|w(t,\varphi;\mu)|;$$

$$|w'_{\varphi_k}(t,\varphi;\mu)|\le C;$$

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|} w(t,\varphi;\mu)}{\partial t^{\alpha_0}\partial\varphi_k^{\alpha_2}\partial\varphi_j^{\alpha_3}}\right| \le C\mu^{-\frac{|\alpha|-1}{2}}\left(\frac{1}{|\tau_0(\varphi)|}+t\right)^{\alpha_1+\alpha_2}|w_t'(t,\varphi;\mu)| \quad \text{при } |\alpha|=1,2\ ;$$

$$|w_t'(t,\varphi;\mu)|^s\left|\frac{\partial^{|\alpha|} w(t,\varphi;\mu)}{\partial t^{\alpha_0}\partial\varphi_k^{\alpha_2}\partial\varphi_j^{\alpha_2}}\right| \le C \quad \text{при } s\ge\frac{p}{2}-2\ ,\ |\alpha|=2\ ;$$

где константы C не зависят от ε .

Наличие последних оценок позволяет доказать две леммы.

<u>Лемма 2.2</u>. Пусть функция $V_\mu(\varepsilon,x)$ определена формулой (I4). Тогда

$$|\mathcal{M}_\varepsilon(h(x)+V_\mu(\varepsilon,x))| \le C\varepsilon \quad \text{при } x\in G,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0],\ \mu=\varepsilon^{p-2},$$

где C не зависит от ε.

<u>Лемма 2.3</u>. Пусть функции $\mathcal{U}(\varepsilon,x)$ и $V_\mu(\varepsilon,x)$ определены указанным выше образом. Тогда

$$|\mathcal{U}(\varepsilon,x)-V_\mu(\varepsilon,x)| \le C\varepsilon \quad \text{при } x\in G,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0],\ \mu=\varepsilon^{p-2};$$

C – не зависит от ε .

Теорема 2.I теперь следует из доказанных лемм.

Третья глава работы посвящена построению с любой степенью точности асимптотики задачи (I) – (2) в случае наличия в уравнении (I) специального вида дополнительных членов с малым параметром.

Изложение ведется на примере краевой задачи:

$$\mathcal{M}_\varepsilon(u)\equiv-\varepsilon^p\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\Lambda_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-\varepsilon^2\Delta u+\mathcal{F}(x,u)=0, \qquad (I7)$$

$$u|_\Gamma=0\ , \qquad (I8)$$

где $\Lambda_p(\tau)=\tau|\tau|^{p-2}$, $p\ge2$, $\mathcal{F}_1(x,u)\equiv\mathcal{F}_u'(x,u)\ge\alpha^2>0$.

Отметим, что при $0<\sigma<2$ задача

$$-\varepsilon^p\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\Lambda_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-\varepsilon^\sigma\Delta u+\mathcal{F}(x,u)=0\ ,\quad u|_\Gamma=0\ ,$$

рассматривается аналогично задаче (17) – (18), а при $\sigma > 2$ аналогично задаче (11) – (12).

В § 1 третьей главы строится асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (17) – (18) в виде:

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{K_1} \varepsilon^{\sigma_i} w_i(x) + \sum_{m=0}^{K_2} \varepsilon^{\sigma_m} v_m(\varepsilon, x) \quad . \qquad (19)$$

Здесь $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_m < \ldots$ – упорядоченное множество всех неотрицательных чисел, представимых в виде $\sigma_i = pl + m$ с целыми l и m; K_i – некоторые положительные целые числа.

Для этого сначала выбираются число K и функции $w_i(x) \in C^2(G)$ такие, что для $\bar{w} = \sum_{i=0}^{K} \varepsilon^{\sigma_i} w_i(x)$ имеем:

$$\mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w}) = \varepsilon^\nu h_1(\varepsilon, x) \ , \quad |h_1(\varepsilon, x)| \le C \ .$$

При этом $w_i(x)$ определяются рекуррентными соотношениями:

$$\mathcal{F}(x, w_0) = 0 \ ,$$

$$\mathcal{F}_1(x, w_0) w_i = -\tilde{S}_i(w_0, \ldots, w_{i-1}) \ , \quad i = 1, \ldots, K \ ,$$

где $\tilde{S}_i(w_0, \ldots, w_{i-1})$ – известные функции.

Для компенсации невязки в выполнении граничных условий (18) строятся затем функции типа пограничного слоя $v_i(\varepsilon, x)$ такие, что для $\bar{v} = \sum_{i=0}^{K} \varepsilon^{\sigma_i} v_i(\varepsilon, x)$ выполнены соотношения:

$$\mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w} + \bar{v}) - \mathcal{M}_\varepsilon(\bar{w}) = \varepsilon^\nu h_2(\varepsilon, x), \ |h_2(\varepsilon, x)| \le C \qquad (20)$$

и

$$(\bar{w}(x) + \bar{v}(\varepsilon, x))\big|_\Gamma = 0 \ . \qquad (21)$$

Предполагается, что функция $v_i(\varepsilon, x)$ имеет в локальных координатах вид:

$$v_i(\varepsilon, x) = \begin{cases} \tau_i(\frac{1}{\varepsilon}\rho, \varphi)\eta(\rho) & \text{при } \rho(x) \le 2s \ , \\ 0 & \text{при } \rho(x) > 2s \ . \end{cases}$$

Тогда из условий (20) и (21) следует, что функции $\tau_i(t,\varphi)$ должны являться решениями следующих задач:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_p\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial t}\right)-a^2(\varphi)\frac{\partial^2 \tau_0}{\partial t^2}+g(\tau_0,\varphi)=0, \qquad (22)$$

$$\tau_0(0,\varphi)\equiv -w_0(x)\big|_\Gamma, \quad \lim_{t\to+\infty}\tau_0(t,\varphi)=0; \qquad (23)$$

и

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(1+(p-1)\left|\frac{\partial \tau_0}{\partial t}\right|^{p-2}\right)\frac{\partial \tau_i}{\partial t}\right]+b(t,\varphi)\tau_i=f_i(t,\varphi), \qquad (24)$$

$$\tau_i(0,\varphi)\equiv -w_i(x)\big|_\Gamma, \quad \lim_{t\to+\infty}\tau_i(t,\varphi)=0 \qquad (25)$$

для $i=1,\dots,K$. Здесь $a(\varphi)>0$; $\lim\limits_{t\to+\infty} b(t,\varphi)>0$; $g(0,\varphi)=0$, $g'_\tau(\tau,\varphi)\geq\delta^2>0$; $f_i(t,\varphi)$ – функция, определяемая по функциям $\tau_0(t,\varphi),\dots,\tau_{i-1}(t,\varphi)$ и экспоненциально убывающая при $t\to+\infty$, если экспоненциально убывают функции $\tau_0(t,\varphi),\dots,\tau_{i-1}(t,\varphi)$.

Отметим, что здесь, в отличие от линейного случая, уравнение для пограничного слоя $\tau_0(t,\varphi)$ при $p>2$ нелинейно, а остальные пограничные слои определяются из линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Доказана

<u>Теорема 3.2</u>. Пусть функции $\Lambda_p(\tau)$, $\mathcal{F}(x,u)$ и граница области G достаточно гладкие. Если $u_\varepsilon(x)$ – решение задачи (19) – (20), а функция $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ определена указанным образом, то

$$\|u_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{W_p^1(G)}\leq C\varepsilon^\omega \quad \text{с} \quad \omega=\frac{2\nu}{p}-1 .$$

В § 2 третьей главы доказана однозначная разрешимость задач (22) – (23) и (24) – (25), что завершает построение асимптотики решения задачи (17) – (18).

Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ, а также на Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию со дня рождения И.Г.Петровского.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [I], [2], [3].

[I] Лунин В.Ю. Об асимптотике решения первой краевой задачи для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка. "Вестник МГУ, математика, механика, № 3, 1976.

[2] Лунин В.Ю. Построение главного члена асимптотики решения первой краевой задачи для одного класса квазилинейных эллиптических уравнений, "Вестник МГУ, математика, механика, № 5, 1976.

[3] Лунин В.Ю. О финитности пограничного слоя в решениях некоторых классов краевых задач, содержащих малый параметр, "Успехи математических наук", т. 3I, вып. 6, 1976.

Автор глубоко благодарен М.И.Вишику и Р.С.Гусаровой за постоянное внимание к работе.

Подп. к печати 29/IX-76г. Л-101731 Ф.
Физ. п. л. 0,75 Уч.-изд. л. 0,5 Заказ 2482
Тираж 200

Изд-во Московского университета, Москва, К-9,
ул. Герцена, 5/7.
Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленгоры