Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

5

Отдельный оттиск

1976

Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1976

УДК 517.9

В. Ю. ЛУНИН

ПОСТРОЕНИЕ ГЛАВНОГО ЧЛЕНА АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В статье обосновывается применение методики, развитой в работах [1, 2], к некоторому классу нелинейных уравнений.

1. В ограниченной области $G\subset\mathbf{R}^n$ с границей $\Gamma=\partial G$ класса C^3 рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -\varepsilon^p \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} A_p\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + F(x, u) = 0, & (1)\\ u|_\Gamma = 0, & (2)\end{cases}$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)\in G$, $A_p(t)=|t|^{p-2}t$, $p>2$, $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$ — малый параметр; $F(x, u)\in C^3(\overline{G}\times\mathbf{R}^1)$, причем

$$F_1(x, u)\equiv\frac{\partial}{\partial u}F(x, u)\geqslant\alpha^2>0, \tag{3}$$

$$|F_1(x, u)|\leqslant C(1+|u|)^{l-2},$$

где l произвольно при $n\leqslant p$; $\dfrac{1}{l}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{n}$ при $n>p$; C — константа.

Замечание 1. В случае $p=2$, то есть линейном случае, построение и обоснование асимптотики вполне аналогичны тем, которые даны в работах [1] и [2].

Определим оператор $T_\varepsilon(u)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_p(G)$ в $W^{-1}_{p/p-1}(G)$ равенством

$$\langle T_\varepsilon(u), v\rangle=\int\limits_G\left[\varepsilon^p\sum_{i=1}^{n}A_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}+F(x, u)v\right]dx$$

для $u, v\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(G)$.

Известно (см., например, [3, 4]), что при принятых предположениях уравнение $T_\varepsilon(u)=0$ имеет единственное решение $u(\varepsilon, x)\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(G)$ для любого $\varepsilon>0$, которое мы назовем обобщенным решением задачи (1)—(2).

2. Рассмотрим вначале вырожденное уравнение

$$F(x,\ u)=0. \tag{4}$$

В силу условия (3) оно имеет единственное решение $u_0(x)=h(x)\in C^3(\bar{G})$.

Если $h(x)|_\Gamma=0$, то $u(x)-h(x)\in \overset{\circ}{W}{}^1_p(G)$ и

$$\frac{\varepsilon^p}{2^{p-1}}\int\limits_G\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(u-h)\right|^p dx+\alpha^2\int\limits_G(u-h)^2\,dx=\langle T_\varepsilon(u)-T_\varepsilon(h),\ u-h\rangle=$$

$$=-\varepsilon^p\int\limits_G\sum_{i=1}^n A_p\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(u-h)\,dx=\varepsilon^p\int\limits_G\left[\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}A_p\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)\right](u-h)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon^{2p}}{2\alpha^2}\int\limits_G\left[\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}A_p\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)\right]^2dx+\frac{\alpha^2}{2}\int\limits_G(u-h)^2\,dx.$$

Отсюда следует, что $\|u-h\|_{W^1_p(G)}\leqslant C\varepsilon$, то есть $h(x)$ является главным членом асимптотики решения задачи (1)—(2).

Однако $h(x)$ не удовлетворяет, вообще говоря, граничным условиям (2). Поэтому далее будем считать, что $h(x)|_\Gamma\not\equiv 0$, и построим функцию $U(\varepsilon,\ x)$, компенсирующую невязку в выполнении граничных условий и быстро убывающую при $\varepsilon\to 0$ в любой внутренней точке G.

Перейдем в окрестности границы к новым локальным координатам. Пусть Γ покрыта конечным числом N окрестностей Γ^k, гомеоморфных шару в $\mathbf{R}^{n-1}$, с локальными координатами $\varphi^k=(\varphi_1^k,\ \ldots,\ \varphi_{n-1}^k)$, $\varphi^k\in\Phi^k$. Пусть S — такое семейство трансверсалей к Γ (например, семейство нормалей), что в некоторой окрестности Γ через каждую точку $x\in\bar{G}$ проходит ровно одна кривая s_x из S, и $\rho(x)$ — расстояние от x до Γ вдоль s_x. Обозначим Γ_η^k множество точек $x\in\bar{G}$, для которых $\rho(x)\leqslant\eta$ и точка пересечения s_x с Γ принадлежит Γ^k, и пусть $\varphi^k(x)$ — координаты точки пересечения s_x с Γ. Пусть $\Gamma_\eta=\bigcup\limits_{k=1}^N\Gamma_\eta^k$.

В силу гладкости Γ координаты φ^k и семейство S могут быть выбраны так, что функции

$$c_{0i}^k(\rho,\ \varphi^k)=\frac{\partial}{\partial x_i}\rho\Big|_{x=x(\rho,\varphi^k)},\quad c_{ji}^k(\rho,\ \varphi^k)=\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_j^k\Big|_{x=x(\rho,\varphi^k)}$$

принадлежат классу $C^2([0,\ \eta]\times\Phi^k)$ и якобиан

$$J(\rho,\ \varphi^k)=\frac{\partial(x_1,\ \ldots,\ x_n)}{\partial(\rho,\ \varphi_1^k,\ \ldots,\ \varphi_{n-1}^k)}\neq 0.$$

Рассмотрим теперь произвольную окрестность Γ_η^k, опуская для краткости верхний индекс k. Перейдем в уравнении (1) к новым координатам $(\rho,\ \varphi)$, выполним регуляризирующую замену $\rho=\varepsilon\xi$ и положим

$$u(\varepsilon,\ x)=h(x(\varepsilon\xi,\ \varphi))+r(\xi,\ \varphi)+\varepsilon r_1(\varepsilon,\ \xi,\ \varphi).$$

Тогда, положив $\varepsilon=0$, получим уравнение для «главной» части $r(\xi,\ \varphi)$ погранслойной поправки:

$$-\left(\sum_{i=1}^n|c_{0i}(0,\ \varphi)|^p\right)\frac{d}{d\xi}A_p\left(\frac{dr}{d\xi}\right)+g(\varphi,\ r)=0, \tag{5}$$

где $g(\varphi, r)=F(x(0, \varphi), r+h(x(0, \varphi)))$. При этом для компенсации невязки в выполнении граничных условий и для убывания пограничного слоя во внутренних точках поставим условия

$$r(0, \varphi)=-h(x(0, \varphi))=r_0(\varphi), \quad \lim_{\xi\to+\infty} r(\xi, \varphi)=0. \tag{6}$$

Лемма. Существует единственная функция $r(\xi, \varphi)\in W_p^1(\mathbf{R}^+\times\Phi)$, такая, что $A_p(r'_\xi(\xi, \varphi))$ непрерывно дифференцируема и выполнены равенство (5) и условия (6). При этом $\operatorname{supp}_\xi r(\xi, \varphi)=[0, \beta(\varphi)]$, где $0\leqslant\beta(\varphi)\leqslant\beta_0<+\infty$.

Доказательство леммы будет приведено далее.

Замечание 2. В отличие от линейного случая (см. [1]), где пограничный слой убывает экспоненциально, здесь погранслойная поправка $r(\xi, \varphi)$ имеет компактный носитель.

Таким образом, мы можем на каждом множестве $[0, \eta]\times\Phi^k$ построить функцию $r^k(\xi, \varphi^k)$ как решение задачи (5)—(6). Пусть ε_0 выбрано так, что $\varepsilon_0\beta_0<\eta$. Определим функцию

$$U(\varepsilon, x)=\begin{cases} r^k(\xi, \varphi^k) & \text{в } \Gamma_\eta^k, \\ 0 & \text{в } G\setminus\Gamma_\eta. \end{cases} \tag{7}$$

Это определение корректно в силу единственности решения задачи (5)—(6).

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. Пусть $u(\varepsilon, x)$ — обобщенное решение задачи (1)—(2). Тогда

$$u(\varepsilon, x)=h(x)+U(\varepsilon, x)+z(\varepsilon, x),$$

где $h(x)$ — решение вырожденного уравнения (4); $U(\varepsilon, x)$ определяется по формуле (7) при помощи решений задачи (5)—(6);

$$\|z(\varepsilon, x)\|_{W_p^1(G)}\leqslant C\varepsilon^\nu; \tag{8}$$

$\nu=\min\left(0, \dfrac{3-p}{p-1}\right)$; C не зависит от ε.

Замечание 3. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{p-1}\|U(\varepsilon, x)\|^p_{W_p^1(\Gamma_\eta^k)}=$$

$$=\int_{\Phi^k}\sum_{i=1}^n|c_{0i}(0, \varphi^k)|^p|J(0, \varphi^k)|\int_0^{\beta_0}\left|\frac{\partial}{\partial\xi}r^k(\xi, \varphi^k)\right|^p d\xi d\varphi^k=C\neq0,$$

то есть

$$\|U(\varepsilon, x)\|_{W_p^1(G)}=O(\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}).$$

Так как $\dfrac{1-p}{p}<\min\left(0, \dfrac{3-p}{p-1}\right)$, оценка (8) показывает, что из решения уже удален главный член асимптотики.

3. Доказательство леммы. Единственность. Если $r_1(\xi, \varphi)$, $r_2(\xi, \varphi)$ — две функции, обладающие указанными свойствами, то, проведя интегрирование по частям, получим

$$0=\sum_{i=1}^n|c_{0i}(0, \varphi)|^p\int_0^\infty\left[A_p\left(\frac{dr_1}{d\xi}\right)-A_p\left(\frac{dr_2}{d\xi}\right)\right]\left(\frac{dr_1}{d\xi}-\frac{dr_2}{d\xi}\right)d\xi+$$

$$+\int_0^\infty[g(\varphi, r_1)-g(\varphi, r_2)](r_1-r_2)\,d\xi\geqslant\alpha^2\int_0^\infty(r_1-r_2)^2\,d\xi,$$

откуда $r_1(\xi, \varphi)=r_2(\xi, \varphi)$.

Существование. Уравнение (5) посредством замены $r'_\xi=t(r)$ приводится к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. Это позволяет получить соотношения, определяющие решения уравнения (5) как неявные функции.

Пусть для определенности $r_0(\varphi)>0$. Обозначим

$$g_1(\varphi, r)=\left(\sum_{i=1}^{n}|c_{0i}(0, \varphi)|^p\right)^{-1} g(\varphi, r).$$

Функция $\int\limits_0^\tau g_1(\varphi, s)\,ds$ имеет при $\tau=0$ нуль кратности два и не имеет в силу условия (3) других нулей. Положим

$$\beta(\varphi)=\int\limits_0^{r_0(\varphi)}\left(\frac{p}{p-1}\int\limits_0^\tau g_1(\varphi, s)\,ds\right)^{-1/p} d\tau, \quad \beta(\varphi)<+\infty.$$

Соотношение

$$\xi=H(\varphi, r)\equiv\int\limits_r^{r_0(\varphi)}\left(\frac{p}{p-1}\int\limits_0^\tau g_1(\varphi, s)\,ds\right)^{-1/p} d\tau$$

определяет при $\xi\in[0, \beta(\varphi))$ функцию $r(\xi, \varphi)$, такую, что при $\xi\in[0, \beta(\varphi))$ она является решением уравнения (5) и $r'_\xi(\xi, \varphi)=-\left(\frac{p}{p-1}\int\limits_0^r g_1(\varphi, s)\,ds\right)^{1/p}<0$ при $\xi\in[0, \beta(\varphi))$,

$$\lim_{\xi\to\beta(\varphi)-0} r(\xi, \varphi)=\lim_{\xi\to\beta(\varphi)-0} r'_\xi(\xi, 0)=0.$$

В случае $r_0(\varphi)<0$ найдем $r(\xi, \varphi)$ из соотношения $\xi=-H(\varphi, r)$ для $\xi\in[0, \beta(\varphi))$. В случае $r_0(\varphi)=0$ решение тривиально.

Доопределим $r(\xi, \varphi)$ нулем для $\xi\in[\beta(\varphi), +\infty)$; тогда можно проверить, что $r(\xi, \varphi)\in W_p^1(\mathbf{R}^+\times\Phi)$ и все производные первого порядка функции $A_p(r'_\xi(\xi, \varphi))$ непрерывны.

Поскольку функция, тождественно равная нулю, является решением уравнения (5), построенная функция $r(\xi, \varphi)$ служит решением задачи (5)—(6).

Замечание 4. Отметим, что $r'_\xi(\xi, \varphi)\in C(\mathbf{R}^+\times\Phi)$, а $\frac{\partial}{\partial\varphi_j} r(\xi, \varphi)$ ограничена в $\mathbf{R}^+\times\Phi$ и терпит разрыв лишь в точках вида $(0, \varphi_0)$, где $r_0(\varphi_0)=0$ и $\frac{\partial r_0}{\partial\varphi_j}(\varphi_0)\neq 0$. Кроме того, при $p\geqslant 4$ функция $r''_{\xi\xi}(\xi, \varphi)$ терпит разрыв в точках вида $(\beta(\varphi), \varphi)$, то есть решение $r(\xi, \varphi)$ не является классическим.

Доказательство теоремы. Пусть $u(\varepsilon, x)$ — решение задачи (1)—(2),

$$\widetilde{u}(\varepsilon, x)=h(x)+U(\varepsilon, x), \quad z(\varepsilon, x)=u(\varepsilon, x)-\widetilde{u}(\varepsilon, x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^1(G).$$

Воспользовавшись алгебраическими неравенствами

$$(|a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b)(a-b)\geqslant\frac{1}{2}|a|^{p-2}(a-b)^2,$$

$$(|a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b)(a-b)\geqslant 2^{1-p}|a-b|^p,$$

получим, оценив $-\langle T_\varepsilon(\widetilde{u}), z\rangle$ снизу:

$$\frac{\varepsilon^p}{2^p}\int\limits_G\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^p dx+\frac{\varepsilon^p}{4}\int\limits_G\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 dx+\alpha^2\int\limits_G z^2dx\leqslant$$

$$\leqslant \langle T_\varepsilon(u) - T_\varepsilon(\widetilde{u}),\ z\rangle = -\langle T_\varepsilon(\widetilde{u}),\ z\rangle. \tag{9}$$

Перейдем к оценке $|\langle T_\varepsilon(\widetilde{u}),\ z\rangle|$ сверху. Пусть

$$R_i(x) = c_{0i}^k(0,\ \varphi^k(x))\frac{\partial}{\partial\xi} r^k(\xi(x),\ \varphi^k(x)) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma_\eta^k.$$

Тогда, выделив главную при $\varepsilon \to 0$ часть, получим, что

$$\varepsilon\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x_i} = R_i(x) + \varepsilon B_i(\varepsilon,\ x),$$

и поскольку $A_p'(t) = (p-1)|t|^{p-2}$ непрерывно дифференцируема при $p > 3$ и удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $p-2$ при $2 < p \leqslant 3$, то

$$\varepsilon^{p-1} A_p\left(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x_i}\right) = A_p(R_i(x)) + \varepsilon B_i(\varepsilon,\ x) A_p'\left(\varepsilon\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x_i}\right) + \varepsilon^{\varkappa-1} S_i(\varepsilon,\ x),$$

где $\varkappa = \min(p,\ 3)$, а функции $B_i(\varepsilon,\ x)$ и $S_i(\varepsilon,\ x)$ ограничены равномерно по $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0]$, $x \in \Gamma_\eta$.

Поскольку функция $A_p(R_i(x))$ непрерывно дифференцируема в Γ_η и обращается в нуль при $\xi(x) \geqslant \beta_0$, то

$$\varepsilon\int\limits_{\Gamma_\eta} A_p(R_i(x))\frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx = -\varepsilon\int\limits_{\Gamma_\eta}\frac{\partial}{\partial x_i} A_p(R_i(x))\,z\,dx,$$

причем, выделив главную при $\varepsilon \to 0$ часть, можно написать

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i} A_p(R_i(x)) = |c_{0i}^k(0,\ \varphi^k(x))|^p\frac{\partial}{\partial\xi} A_p\left(\frac{\partial}{\partial\xi} r^k(\xi(x),\ \varphi^k(x))\right) + \varepsilon D_i(\varepsilon,\ x),$$

$$F(x,\ \widetilde{u}(\varepsilon,\ x)) = g(\varphi^k(x),\ r^k(\xi(x),\ \varphi^k(x))) + \varepsilon E(\varepsilon,\ x) \quad \text{для } x \in \Gamma_\eta,$$

где $D_i(\varepsilon,\ x)$, $E(\varepsilon,\ x)$ ограничены равномерно по $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0]$, $x \in \Gamma_\eta$ и обращаются в нуль в $\Gamma_\eta \setminus \Gamma_{\varepsilon\beta_0}$. Таким образом,

$$\langle T_\varepsilon(\widetilde{u}),\ z\rangle = \int\limits_{\Gamma_\eta}\left[\varepsilon^p\sum_{i=1}^n A_p\left(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial z}{\partial x_i} + F(x,\ \widetilde{u})\,z\right]dx + \varepsilon^p\int\limits_{G\setminus\Gamma_\eta}\sum_{i=1}^n A_p\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)\frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\eta}\left[-\sum_{i=1}^n |c_{0i}^k(0,\ \varphi^k(x))|^p\frac{\partial}{\partial\xi} A_p\left(\frac{\partial}{\partial\xi} r^k(\xi(x),\ \varphi^k(x))\right) + \right.$$

$$\left. + g(\varphi^k(x),\ r^k(\xi(x),\ \varphi^k(x)))\right]z\,dx + \int\limits_{\Gamma_\eta}\varepsilon\left[\sum_{i=1}^n D_i(\varepsilon,\ x) + E(\varepsilon,\ x)\right]z\,dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^n\int\limits_{\Gamma_\eta}\varepsilon^2 B_i(\varepsilon,\ x) A_p'\left(\varepsilon\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx + \sum_{i=1}^n\int\limits_{\Gamma_\eta}\varepsilon^{\varkappa} S_i(\varepsilon,\ x)\frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^n\int\limits_{G\setminus\Gamma_\eta}\varepsilon^p A_p\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)\frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx. \tag{10}$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства обращается в нуль по построению функции $r^k(\xi,\ \varphi^k)$. Оценим остальные слагаемые.

Так как $\operatorname{supp}_x D_i(\varepsilon, x) \subseteq \Gamma_{\varepsilon\beta_0}$ и $\operatorname{supp}_x E(\varepsilon, x) \subseteq \Gamma_{\varepsilon\beta_0}$, то, воспользовавшись неравенством Юнга

$$ab \leqslant C(\gamma)\, a^{\frac{q}{q-1}} + \gamma b^q, \qquad a,\ b,\ \gamma > 0, \quad q > 1; \tag{11}$$

с $q = 2$, получим, что

$$\left| \int\limits_{\Gamma_\eta} \varepsilon \left[\sum_{i=1}^{n} D_i(\varepsilon, x) + E(\varepsilon, x) \right] z dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^2 \int\limits_{\Gamma\eta} \left[\sum_{i=1}^{n} D_i(\varepsilon, x) + E(\varepsilon, x) \right]^2 dx + \frac{\alpha^2}{2} \int\limits_{\Gamma_\eta} z^2 dx \leqslant C\varepsilon^3 + \frac{\alpha^2}{2} \int\limits_{\Gamma_\eta} z^2 dx. \tag{12}$$

Так как функция $|t|^{p-2}$ непрерывно дифференцируема при $p > 3$ и удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $p-2$ при $2 < p \leqslant 3$, то

$$\left| \left(\left| \varepsilon \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} \right|^{p-2} - |R_i(x)|^{p-2} \right) \right| \leqslant C\varepsilon^{\varkappa-2} |B_i(\varepsilon, x)|_{\varkappa-2},$$

где $\varkappa = \min(p, 3)$. Учитывая, что $\operatorname{supp}_x R_i(x) \subset \Gamma_{\varepsilon\beta_0}$, и используя неравенство (11) с $q = 2$, получаем

$$\left| \int\limits_{\Gamma_\eta} \varepsilon^2 B_i(\varepsilon, x) \cdot A_p' \left(\varepsilon \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial z}{\partial x_i} dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^2 \int\limits_{\Gamma\eta} B_i^2(\varepsilon, x) \left| \varepsilon \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} \right|^{p-2} dx + \frac{\varepsilon^p}{4} \int\limits_{\Gamma_\eta} \left| \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^{\varkappa} + \frac{\varepsilon^p}{4} \int\limits_{\Gamma_\eta} \left| \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2 dx. \tag{13}$$

Применив неравенство (11) с $q = p$, получим

$$\left| \int\limits_{\Gamma_\eta} \varepsilon^{\varkappa} S_i(\varepsilon, x) \frac{\partial z}{\partial x_i} dx \right| \leqslant \tag{14}$$

$$\leqslant C\varepsilon^{\frac{(\varkappa-1)p}{p-1}} \int\limits_{\Gamma_\eta} |S_i(\varepsilon, x)|^{\frac{p}{p-1}} dx + \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}} \int\limits_{\Gamma_\eta} \left| \frac{\partial z}{\partial x_i} \right|^p dx \leqslant C\varepsilon^{\frac{(\varkappa-1)p}{p-1}} + \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}} \int\limits_{\Gamma_\eta} \left| \frac{\partial z}{\partial x_i} \right|^p dx,$$

$$\left| \int\limits_{G \setminus \Gamma_\eta} \varepsilon^p A_p \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right) \frac{\partial z}{\partial x_i} dx \right| \leqslant \tag{15}$$

$$\leqslant C\varepsilon^p \int\limits_{G \setminus \Gamma_\eta} \left| A_p \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right) \right|^{\frac{p}{p-1}} dx + \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}} \int\limits_{G \setminus \Gamma_\eta} \left| \frac{\partial z}{\partial x_i} \right|^p dx \leqslant C\varepsilon^p + \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}} \int\limits_{G \setminus \Gamma_\eta} \left| \frac{\partial z}{\partial x_i} \right|^p dx,$$

где C обозначает константу, не зависящую от ε.

Из (9) и (10), учитывая оценки (12), (13), (14) и (15), получаем теперь, что

$$\int\limits_G \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial z}{\partial x_i} \right|^p dx \leqslant C\varepsilon^{\sigma-p}, \qquad \int\limits_G z^2 dx \leqslant C\varepsilon^{\sigma}, \tag{16}$$

где $\sigma = \min\left(p, \frac{2p}{p-1}\right)$, откуда и следует утверждение теоремы.

Следствие. Пусть $p > n$. Тогда в условиях теоремы 1

$$|z(\varepsilon, x)| \leqslant C\varepsilon^{\frac{\sigma-n}{p}},$$

где $\sigma = \min\left(p, \frac{2p}{p-1}\right)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $x \in G$. Таким образом, при $n \leqslant 2$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in G} |z(\varepsilon, x)| = 0.$$

В самом деле, при $p > n$ имеем вложение $W_p^1(G) \subset C(\overline{G})$, причем (см. [5])

$$\sup_{x \in G} |a(x)| \leqslant C\varepsilon^{-\frac{n}{2}} \|a\|_{L_2(G)} + C\varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial a}{\partial x_i} \right\|_{L_p(G)}$$

для любой $a(x) \in W_p^1(G)$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где C не зависит от $a(x)$ и ε. Отсюда в силу оценок (16) следует требуемое утверждение.

Автор глубоко благодарен М. И. Вишику и Р. С. Гусаровой за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. — «Успехи матем. наук», 1957, 12, вып. 5, с. 3—122.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Об асимптотике решения краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений. — «Докл. АН СССР», 1958, 121, № 5, с. 778—781.
3. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.
4. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., 1972.
5. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975.

Поступила в редакцию
16.I 1976 г.

Кафедра
дифференциальных уравнений

V. Yu. Lunin

THE CONSTRUCTION OF THE LEADING TERM OF THE ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A CLASS OF QUASI-LINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

The Vishik — Lyusternik method is applied to construct the leading term of the asymptotic solution of the problem

$$\begin{cases} -\varepsilon^p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + F(x, u) = 0, \\ u|_\Gamma = 0, \end{cases}$$

where $\varepsilon > 0$ is a small parameter.