Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА,
МЕХАНИКА

3

Отдельный оттиск

1976

Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1976

УДК 517.9

В. Ю. ЛУНИН

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В данной заметке строится асимптотическое разложение по степеням малого параметра решения первой краевой задачи для квазилинейного уравнения с частными производными. При этом используются методы, развитые в [1, 2].

1. В ограниченной области $G \subset \mathbf{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial G$ рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} L_\varepsilon(u) \equiv -\varepsilon^4 \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^3 - \varepsilon^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + F(x, u) = 0, & (1) \\ u| = 0, & (2) \end{cases}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малый параметр.

Предположим, что $F(x, u)$ — достаточно гладкая функция, причем

$$F_1(x, u) \equiv \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \geqslant \alpha^2 > 0, \tag{3}$$

$$F_k(x, u) \leqslant C(1 + |u|)^{l-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2N+3, \tag{4}$$

где

$$F_k(x, u) \equiv \frac{\partial^k F(x, u)}{\partial u^k},$$

C — некоторая константа, l произвольно при $n \leqslant 4$, $\frac{1}{l} \geqslant \frac{1}{4} - \frac{1}{n}$ при $n > 4$.

Определим оператор $A_\varepsilon(u)$ равенством

$$\langle A_\varepsilon(u), v\rangle = \varepsilon^4 \sum_{i=1}^{n} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^3 \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx +$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} \int_G \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_G F(x, u)\, v\, dx \tag{5}$$

для u, $v \in \overset{\circ}{W}{}_4^1(G)$, где $W_p^1(G)$ — пространство Соболева функций, имеющих первые обобщенные производные в $L_p(G)$; $\overset{\circ}{W}{}_p^1(G)$ — замыкание в норме $W_p^1(G)$ множества бесконечно дифференцируемых, финитных в G функций; $\langle f, v\rangle$ — значение функционала f из пространства, сопряженного с $\overset{\circ}{W}{}_p^1(G)$, на элементе $v \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(G)$.

В работах М. И. Вишика (см. также [3, 4]) показано, что при сделанных допущениях равенство (5) определяет ограниченный, сильно монотонный, хеминепрерывный оператор из $\overset{\circ}{W}{}_4^1(G)$ в $W_{4/3}^{-1}(G)$, а потому существует единственное решение уравнения $A_\varepsilon(u)=0$, которое назовем обобщенным решением задачи (1)—(2).

2. Для того чтобы получить асимптотическое разложение обобщенного решения задачи (1)—(2), мы, следуя методике М. И. Вишика и Л. А. Люстерника, построим вначале, не заботясь о выполнении граничных условий (2), функцию

$$\bar{w}(x) = \sum_{i=0}^{N+1} \varepsilon^{2i} w_i(x),$$

где $w_i(x) \in C^2(\bar{G})$ выбраны таким образом, что

$$L_\varepsilon(\bar{w}) = \varepsilon^{2(N+2)} h_1(\varepsilon, x), \quad |h_1(\varepsilon, x)| \leqslant C \tag{6}$$

при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $x \in \bar{G}$. Поскольку $\bar{w}(x)$ не удовлетворяет, вообще говоря, граничным условиям, построим затем функцию

$$\bar{v}(\varepsilon, x) = \sum_{i=1}^{2N+3} \varepsilon^i v_i(\varepsilon, x),$$

где $v_i(\varepsilon, x)$ имеет характер пограничного слоя в окрестности Γ,

$$\|v_i(\varepsilon, x)\|_{\overset{\circ}{W}{}_4^1} \sim \varepsilon^{-3/4},$$

причем

$$(\bar{w}(x) + \bar{v}(\varepsilon, x))|_\Gamma = 0$$

и

$$L_\varepsilon(\bar{w} + \bar{v}) - L_\varepsilon(\bar{w}) = \varepsilon^{2(N+2)} h_2(\varepsilon, x), \quad |h_2(\varepsilon, x)| \leqslant C \text{ при } \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \quad x \in \bar{G}. \tag{7}$$

Заметим теперь, что если u_ε — обобщенное решение задачи (1)—(2), а $\tilde{u}_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}_4^1(G) \cap C^2(\bar{G})$ — некоторое «приближенное» решение, то из (5) имеем

$$\frac{1}{4}\varepsilon^4 \|u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\|^4_{W_4^1} + \varepsilon^2 \|u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\|^2_{W_2^1} + \alpha^2 \|u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L_2} \leqslant \langle -A_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon), u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\rangle =$$

$$= -\int_G L_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon)\,dx \leqslant \frac{1}{4\alpha^2}\|L_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)\|^2_{L_2} + \alpha^2 \|u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\|^2_{L_2},$$

откуда

$$\varepsilon^2 \|u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\|^2_{W_4^1} \leqslant \frac{1}{\alpha} \|L_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)\|_{L_2}. \tag{8}$$

Поэтому, если функции $w(x)$ и $\bar{v}(\varepsilon, x)$ с указанными свойствами построены, из (8) имеем

$$\|u_\varepsilon - (\bar{w} + \bar{v})\|_{W_4^1} \leqslant C\varepsilon^{N+1}.$$

Обозначим

$$h((\varepsilon, x) = \sum_{i > \frac{N}{2}} \varepsilon^{2i-N-1} w_i(x) + \sum_{i=N+2}^{2N+3} \varepsilon^{i-N-1} v_i(\varepsilon, x) + \varepsilon^{-N-1}[u_\varepsilon - (\bar{w} + \bar{v})].$$

Теорема. Пусть $F(x, u) \in C^{2N+5}(\bar{G} \times \mathbf{R}^1)$ и удовлетворяет условиям (3) и (4). Пусть область G имеет границу Γ класса C^{2N+7}. Тогда обобщенное решение задачи (1) — (2) представимо в виде

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \varepsilon^{2i} w_i(x) + \sum_{i=0}^{N+1} \varepsilon^i v_i(\varepsilon, x) + \varepsilon^{N+1} h(\varepsilon, x),$$

где $w_0(x)$ — решение вырожденного уравнения; $w_i(x)$ определяются рекуррентными формулами; $v_i(\varepsilon, x)$ — функции типа пограничного слоя в окрестности Γ, построение которых сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений; $\|h(\varepsilon, x)\|_{W_4^1} \leqslant C$, где C не зависит от ε.

3. Прежде чем приступить к доказательству теоремы, мы докажем две вспомогательные леммы. Обозначим для функции $f(\xi, \varphi)$, определенной при $(\xi, \varphi) \in \mathbf{R}^+ \times \Phi$, $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty)$, $\Phi \subset \mathbf{R}^{n-1}$,

$$\varkappa_\xi(f) = \lim_{\xi \to +\infty} \frac{\ln|f(\xi, \varphi)|}{\xi}$$

ее строгий характеристический показатель (экспоненциальный тип), если предел существует.

Введем в рассмотрение класс функций

$$N^k_{\sigma(\varphi)} = \{f(\xi, \varphi) \in C^k(\mathbf{R}^+ \times \Phi) : \varkappa_\xi(D^\alpha_{\xi,\varphi} f) \leqslant \sigma(\varphi) \text{ для } 0 \leqslant |\alpha| \leqslant 2\}.$$

Лемма 1. Пусть

$$g(\varphi, u) \in C^k(\Phi \times \mathbf{R}^1),\ g(\varphi, 0) = 0,\ g'_u(\varphi, u) \geqslant \alpha^2 > 0.$$

Пусть $a(\varphi)$, $u_0(\varphi) \in C^k(\Phi)$, причем $a(\varphi) > 0$. Тогда при любом фиксированном $\varphi \in \Phi$ задача

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{du}{d\xi}\right)^3 + a^2(\varphi)\dfrac{d^2u}{d\xi^2} = g(\varphi, u), & (9) \\ u(0, \varphi) = u_0(\varphi), \quad \varkappa_\xi(u) < 0 & (10) \end{cases}$$

имеет единственное решение $u(\xi, \varphi)$. При этом

$$u(\xi, \varphi),\quad u''_{\xi\xi}(\xi, \varphi) \in N^k_{-\alpha/a(\varphi)}. \qquad (10)$$

Доказательство. Единственность. Если $u(\xi, \varphi)$, $v(\xi, \varphi)$ — два решения (9) — (10), то, интегрируя по частям, имеем

$$0=\int_0^\infty\left[\left(\frac{du}{d\xi}\right)^3-\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^3\right]\left(\frac{du}{d\xi}-\frac{dv}{d\xi}\right)d\xi+$$

$$+\int_0^\infty\left(\frac{du}{d\xi}-\frac{dv}{d\xi}\right)^2d\xi+\int_0^\infty[g(\varphi,u)-g(\varphi,v)](u-v)\,d\xi,$$

откуда следует, что $u(\xi,\varphi)\equiv v(\xi,\varphi)$.

Существование. Обозначим

$$F(\varphi,u)=\operatorname{sgn}u\left[\left(\frac{a^4(\varphi)}{9}+\frac{4}{3}\int_0^u g(\varphi,\tau)\,d\tau\right)^{1/2}-\frac{a^2(\varphi)}{3}\right]^{1/2},$$

тогда

$$F(\varphi,u)\in C^k(\Phi\times\mathbf{R}^1)\ \text{и}\ \sigma(\varphi)\equiv F'_u(\varphi,u)|_{u=0}\geqslant\frac{\alpha}{a(\varphi)}.$$

Нетрудно видеть, что решение задачи

$$\begin{cases}u'_\xi(\xi,\varphi)=-F(\varphi,u),\\ u(0,\varphi)=u_0(\varphi)\end{cases}$$

является решением уравнения (9). Так как при этом

$$\lim_{\xi\to+\infty}\frac{\ln|u(\xi,\varphi)|}{\xi}=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{u'_\xi(\xi,\varphi)}{u(\xi,\varphi)}=\lim_{u\to0}\frac{-F(\varphi,u)}{u}=-\sigma(\varphi)$$

($\varkappa_\xi(u)=\varkappa_\xi(u'_\xi)=-\sigma(\varphi)$ и, в частности, имеет место (10)), то функция $u(\xi,\varphi)$ является решением задачи (9)—(10). Из теоремы о дифференцируемой зависимости решения задачи Коши от параметров следует требуемая гладкость $u(\xi,\varphi)$. Выписывая для производных функции $u(\xi,\varphi)$ по параметрам $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}$ уравнения в вариациях, можно видеть, что имеет место (11).

Лемма 2. Пусть $a(\xi,\varphi)$, $b(\xi,\varphi)\in N_0^k$; $1+a(\xi,\varphi)>0$; $b(\xi,\varphi)>0$. Пусть

$$\lim_{\xi\to+\infty}a(\xi,\varphi)=0,\quad\lim_{\xi\to+\infty}b(\xi,\varphi)=\beta^2(\varphi)\geqslant\alpha^2(\varphi)>0.$$

Тогда для любых $u_0(\varphi)\in C^k(\Phi)$ и $f(\xi,\varphi)\in N^k_{-\alpha(\varphi)}$ задача

$$\begin{cases}-\dfrac{d}{d\xi}\left[1+a(\xi,\varphi)\dfrac{du}{d\xi}\right]+b(\xi,\varphi)u=f(\xi,\varphi), & (12)\\ u(0,\varphi)=u_0(\varphi),\ \varkappa_\xi(u)<0 & (13)\end{cases}$$

имеет единственное решение $u(\xi,\varphi)$. При этом

$$u(\xi,\varphi),\ u''_{\xi\xi}(\xi,\varphi)\in N^k_{-\alpha(\varphi)}. \qquad (14)$$

Доказательство. Путем замены

$$t(\xi,\varphi)=\int_0^{\xi\beta(\varphi)}\frac{d\tau}{1+a(\tau,\varphi)}$$

задача сводится к такой:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v}{dt^2} - [1 + \gamma(t, \varphi)]\, v = h(t, \varphi), & (15) \\ v(0, \varphi) = u_0(\varphi), \ \varkappa_t(v) < 0, & (16) \end{cases}$$

где

$$v(t, \varphi) = u(\xi(t, \varphi), \varphi), \quad 1 + \gamma(t, \varphi) > 0, \quad \lim_{t \to +\infty} \gamma(t, \varphi) = 0,$$

$$\gamma(t, \varphi) \in N_0^k \text{ и } h(t, \varphi) \in N^k_{-\alpha(\varphi)/(\beta(\varphi)}.$$

Рассматривая при фиксированном $\varphi \in \Phi$ задачу Коши для уравнения Риккати:

$$\frac{dp}{dt} + p^2 = 1 + \gamma(t, \varphi), \quad p(0, \varphi) = r > 0,$$

легко видеть (см. [5], стр. 150), что ее решение определено при $t \in \mathbf{R}^+$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t, \varphi) = 1$.

Выписывая для производных функций $p(t, \varphi)$ по параметрам $\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_{n-1}$ уравнения в вариациях, убеждаемся в том, что

$$p(t, \varphi), \ p'_t(t, \varphi) \in N_0^k.$$

Полагая

$$\tilde{v}_+(t, \varphi) = \exp \int_0^t p(\tau, \varphi)\, d\tau, \quad \tilde{v}_-(t, \varphi) = \tilde{v}_+(t, \varphi) \int_t^\infty [\tilde{v}_+(\tau, \varphi)]^{-2}\, d\tau,$$

мы получаем два линейно независимых решения однородного уравнения

$$v''_{tt} - [1 + \gamma(t, \varphi)]\, v = 0,$$

таких, что

$$\tilde{v}_+(t, \varphi), \ (\tilde{v}_+(t, \varphi))''_{tt} \in N_1^k; \ \tilde{v}_-(t, \varphi), \quad (\tilde{v}_-(t, \varphi))''_{tt} \in N^k_{-1}.$$

Пусть

$$v_+(t, \varphi) = \tilde{v}_+(t, \varphi) - \frac{\tilde{v}_-(t, \varphi)}{\tilde{v}_-(0, \varphi)}, \quad v_-(t, \varphi) = \frac{\tilde{v}_-(t, \varphi)}{\tilde{v}_-(0, \varphi)},$$

$$G(t, \tau, \varphi) = \frac{1}{W(\varphi)} \begin{cases} v_-(t, \varphi)\, v_+(\tau, \varphi), & \tau < t, \\ v_+(t, \varphi)\, v_-(\tau, \varphi), & \tau > t, \end{cases}$$

где $W(\varphi)$ — определитель Вронского решений $u_+(t, \varphi)$, $u_-(t, \varphi)$. Тогда единственное решение задачи (15)—(16) дается равенством

$$v(t, \varphi) = u_0(\varphi)\, v_-(t, \varphi) + \int_0^\infty G(t, \tau, \varphi)\, h(\tau, \varphi)\, d\tau. \tag{17}$$

Из (17) вытекает, что $v(t, \varphi)$, $v''_{tt}(t, \varphi) \in N^k_{-\alpha(\varphi)/\beta(\varphi)}$ и, следовательно функция $u(\xi, \varphi) = v(t(\xi, \varphi), \varphi)$ является единственным решением задачи (12)—(13) и удовлетворяет (14).

4. Доказательство теоремы. Построение $\overline{w}(x)$. Если

$$\overline{w}(x) = \sum_{i=0}^{N+1} \varepsilon^i w_i(x),$$

то, разложив $L_\varepsilon(\overline{w})$ по степеням ε^2, получим, что

$$L_\varepsilon(\overline{w}) = F(x, w_0) + \sum_{i=1}^{N+1} \varepsilon^{2i} [F_1(x, w_0) w_i + \widetilde{Q}_i(w)] + \varepsilon^{2(N+2)} Q_{N+2}(\varepsilon; w), \quad (18)$$

где $\widetilde{Q}_i(w) = Q_i(w_0, \ldots, w_{i-1})$ — функция класса C^{2N+5-i}, зависящая только от $x, w_0, \ldots, w_{i-1}$ и их первых и вторых производных: $Q_{N+2}(\varepsilon; w)$ — равномерно по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ непрерывная функция, зависящая от $x, w_0, \ldots, w_{N+1}$ и их первых и вторых производных.

В силу (3) мы можем определить $w_0(x)$ из уравнения

$$F(x, w_0) = 0. \quad (19)$$

При этом $w_0(x) \in C^{2N+5}(\overline{G})$.

Определим затем последовательно функции

$$w_i(x) = -\frac{\widetilde{Q}_i(w_0, \ldots, w_{i-1})}{F_1(x, w_0)} \in C^{2(N-i)+5}(\overline{G}), \qquad i = 1, \ldots, N+1. \quad (20)$$

В силу (18) при таком выборе $\overline{w}(x)$ условие (6) будет выполнено.

5. Для построения функции $v(\varepsilon, x)$ перейдем в окрестности границы к новым локальным координатам.

Мы можем выбрать такое семейство F трансверсалей к Γ (например, семейство нормалей), что в некоторой окрестности Γ через каждую точку проходит ровно одна кривая из семейства F, и определить в окрестности каждой точки из Γ локальную систему координат $(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, где координата ρ равна расстоянию точки до границы вдоль трансверсали из F, проходящей через эту точку. При этом F и локальные координаты можно выбрать так, что $\rho(x)$, $\varphi_j(x)$, $j=1, \ldots, n-1$, принадлежат классу C^{2N+6}. В силу компактности Γ покрывается конечным числом таких окрестностей $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^m$, причем можем считать

$$\Gamma^k \cap \overline{G} = \{(\rho, \varphi^k) : \rho \in [0, \eta), \ \varphi^k \in \Phi\},$$

где Φ гомеоморфно шару в $\mathbf{R}^{n-1}$.

Рассмотрим теперь произвольную окрестность $\Gamma^k \cap \overline{G}$, обозначая координаты в ней $(\rho, \varphi) = (\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$.

Если обозначить

$$c_{0i}(\rho, \varphi) = \left.\frac{\partial \rho(x)}{\partial x_i}\right|_{x=x(\rho, \varphi)}, \quad c_{ji} = \left.\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_i}\right|_{x=x(\rho, \varphi)}$$

элементы матрицы Якоби, то

$$c_{ji}(\rho, \varphi) \in C^{2N+5}([0, \eta) \times \Phi)$$

и

$$\delta_1(\varphi) = \Big(\sum_{i=1}^{n} [c_{0i}(0, \varphi)]^4\Big)^{1/2} > 0, \qquad \delta_2(\varphi) = \Big(\sum_{i=1}^{n} [c_{0i}(0, \varphi)^2]\Big)^{1/2} > 0.$$

Выполним замену координат, связанную с выделенным направлением ρ: $\rho = \varepsilon\xi$.

Пусть

$$\bar{r}(\xi, \varphi) = \sum_{i=0}^{2N+3} \varepsilon^i r_i(\xi, \varphi),$$

где $r_i(\xi, \varphi)$ — некоторые функции в $\Gamma^k \cap \bar{G}$. Записывая разложение $L_\varepsilon(\bar{r}(\xi(x), \varphi(x)))$ по степеням ε в локальных координатах (ξ, φ), получаем, что

$$L_\varepsilon(\bar{r}(\xi(x), \varphi(x))) =$$

$$= \left[-\delta_1^2(\varphi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial r_0}{\partial\xi}\right)^3 - \delta_2^2(\varphi)\frac{\partial^2 r_0}{\partial\xi^2} + F(x(0, \varphi), r_0)\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2N+3} \varepsilon^i \left\{-\delta_1^2(\varphi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[3\left(\frac{\partial r_0}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial r_i}{\partial\xi}\right] -\right.$$

$$\left. - \delta_2^2(\varphi)\frac{\partial^2 r_i}{\partial\xi^2} + F_1(x(0, \varphi), r_0) r_i + \widetilde{H}_i(r)\right\} + \varepsilon^{2(N+2)} H_{2N+4}(\varepsilon; r),$$

где $\widetilde{H}_i(r) = \widetilde{H}_i(r_0, \ldots, r_{i-1})$ — функция класса C^{2N+5-i}, зависящая только от $\xi, \varphi, r_0, \ldots, r_{i-2}$, их первых и вторых производных, а также от

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial\xi^\alpha \partial\varphi_k^\beta} r_{i-1}, \text{ где } 0 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 2, \ \beta \leqslant 1; \ k = 1, \ldots, n-1;$$

$H_{2N+4}(\varepsilon; r)$ — непрерывно, равномерно по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ дифференцируемая функция, зависящая от $\xi, \varphi, r_0, \ldots, r_{2N+3}$ и их первых и вторых производных.

Пусть

$$\bar{t}(\xi, \varphi) = \sum_{i=0}^{2N+3} \varepsilon^i t_i(\xi, \varphi) + \varepsilon^{2(N+2)} t_{2N+4}(\varepsilon; \xi, \varphi)$$

есть разложение Тейлора по степеням ε функции $\bar{w}(x(\varepsilon\xi, \varphi))$, построенной в предыдущем пункте. Таким образом,

$$t_i(\xi, \varphi) = \sum_{2k+l=i} \frac{1}{l!} \xi^l \frac{\partial^l}{\partial\rho^l} w_k(x(\rho, \varphi))|_{\rho=0}$$

есть полином по ξ степени не выше i с коэффициентами из $C^{2N+5-i}(\Phi)$ (при этом $t_0(\xi, \varphi) = w_0(x(0, \varphi)) = t_0(\varphi)$ не зависит от ξ).

Используя (13), получаем, что при $\varepsilon\xi < \eta$

$$L_\varepsilon(\bar{r}(\xi(x), \varphi(x)) + w(x)) - L_\varepsilon(\bar{w}(x)) = \sum_{i=0}^{2N+4} \varepsilon^i R_i(r),$$

где

$$R_0(r) = -\delta_1^2(\varphi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial r_0}{\partial\xi}\right)^3 -$$

$$- \delta_2^2(\varphi)\frac{\partial^2 r_0}{\partial\xi^2} + F(x(0, \varphi), r_0 + t_0) - F(x(0, \varphi), t_0),$$

$$R_i(r) = -\delta_1^2(\varphi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[3\left(\frac{\partial r_0}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial r_i}{\partial\xi}\right] -$$

$$- \delta_2^2(\varphi)\frac{\partial^2 r_i}{\partial\xi^2} + F_1(x(0, \varphi), r_0 + t_0) r_i + \widetilde{R}_i(r), \tag{21}$$

$$\widetilde{R}_i(r) = \widetilde{R}_i(r_0, \ldots, r_{i-1}) =$$

$$= -\delta_1^2(\varphi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[3\left(\frac{\partial r_0}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial t_i}{\partial\xi}\right] + [\widetilde{H}_i(r+t) - \widetilde{H}_i(t)],\ i=1,\ldots,2N+3, \quad (22)$$

$$R_{2N+4}(\varepsilon;\ r) = H_{2N+4}(\varepsilon;\ r+t) - H_{2N+4}(\varepsilon;\ t).$$

Пусть $\sigma(\varphi) = \alpha/\delta_2(\varphi)$. Согласно лемме 1 мы можем выбрать функцию $r_0(\xi, \varphi)$ так, что

$$r_0(\xi, \varphi),\ (r_0(\xi, \varphi))''_{\xi\xi} \in N^{2N+5}_{-\sigma(\varphi)},$$

$$R_0(r_0) = 0, \quad r_0(0, \varphi) = -w(x(0, \varphi)).$$

Поскольку из (22) вытекает, что $\widetilde{R}_i(r) \in N^k_{-\sigma(\varphi)}$, если $r_0, \ldots, r_{i-2} \in N^{k+2}_{-\sigma(\varphi)}$; $r_{i-1}, (r_{i-1})'_\xi \in N^{k+1}_{-\sigma(\varphi)}$, то, используя лемму 2, мы можем последовательно выбрать $r_i(\xi, \varphi)$ так, что $r_i(\xi, \varphi), (r_i(\xi, \varphi))''_{\xi\xi} \in N^{2N+5-i}_{-\sigma(\varphi)}$,

$$R_i(r) = 0, \quad r_{2k}(0, \varphi) = -w_k(x(0, \varphi)), \quad r_{2k+1}(0, \varphi) = 0,$$
$$i = 1, \ldots, 2N+3.$$

Таким образом, в каждой окрестности $\Gamma^k \cap \bar{G}$ мы можем построить функцию

$$\bar{r}^k(\xi, \varphi) = \sum_{i=0}^{2N+3} \varepsilon^i r_i^k(\xi, \varphi),$$

где все $r_i^k(\xi, \varphi) \in N^2_{-\sigma(\varphi)}$, так что $\bar{r}^k(0, \varphi) = -\bar{w}(x(0, \varphi))$ и в $\Gamma^k \cap G$

$$L_\varepsilon(\bar{r}^k(\xi(x), \varphi(x)) + \bar{w}(x)) - L_\varepsilon(\bar{w}(x)) = \varepsilon^{2(N+2)} R_{2N+4}(\varepsilon, r). \quad (23)$$

Пусть

$$\Gamma_\eta = \bigcup_{k=1}^{m} (\Gamma^k \cap \bar{G}),\ \Gamma_\mu = \{x \in \Gamma_\eta : \rho(x) \leqslant \mu\}.$$

Возьмем некоторую функцию $\psi(x) \in C^\infty(\bar{G})$, такую, что $\psi(x) \equiv 1$ в $\Gamma_{\eta/3}$ и $\psi(x) \equiv 0$ в $\bar{G} \setminus \Gamma_{2\eta/3}$, и определим функцию $\bar{v}(\varepsilon, x)$ равенством

$$\bar{v}(\varepsilon, x) = \begin{cases} \psi(x)\bar{r}^k\left(\dfrac{\rho(x)}{\varepsilon}, \varphi^k(x)\right) & \text{в } \Gamma^k \cap \bar{G}, \\ 0 & \text{в } \bar{G} \setminus \Gamma_{2\eta/3} \end{cases}$$

(это определение корректно, так как $\bar{r}^k(\xi, \varphi^k)$ и $\bar{r}^l(\xi, \varphi^l)$ совпадают в $\Gamma^k \cap \Gamma^l \cap \bar{G}$ в силу единственности решения задач (9) — (10), (12) — (13)).

Определенная таким образом функция $\bar{v}(\varepsilon, x) \in C^2(\bar{G})$, причем в силу (23) в $\Gamma_{\eta/3}$ выполняется оценка

$$|L_\varepsilon(\bar{v}(\varepsilon, x) + \bar{w}(x)) - L_\varepsilon(\bar{w}(x))| \leqslant C\varepsilon^{2(N+2)},$$

а в $\bar{G} \setminus \Gamma_{2\eta/3}$

$$L_\varepsilon(\bar{v}(\varepsilon, x) + \bar{w}(x)) - L_\varepsilon(\bar{w}(x)) \equiv 0.$$

Поскольку при $\frac{\eta}{3} \leqslant \varepsilon\xi \leqslant \frac{2\eta}{3}$ в $\Gamma^k \cap \bar{G}$ для $|\alpha| \leqslant 2$

$$|D_x^\alpha(\psi(x)\bar{v}^k(\xi(x), \varphi(x)))| \leqslant \frac{C_\nu}{\varepsilon^{|\alpha|}} \exp\left\{-\frac{\eta}{3\varepsilon}(\sigma(\varphi) - \nu)\right\}$$

при любом $\nu > 0$, то в $\Gamma_{2\eta/3} \setminus \Gamma_{\eta/3}$ имеем для любого $k > 0$

$$| L_\varepsilon (\bar{v}(\varepsilon, x) + \bar{w}(x)) - L_\varepsilon (\bar{w}(x)) | \leqslant C_k \varepsilon^k.$$

Таким образом, во всей области $\bar{G}$ имеет место (7). Это завершает доказательство теоремы.

В заключение приношу благодарность М. И. Вишику, привлекшему мое внимание к данной тематике, и Р. С. Гусаровой за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. «Успехи матем. наук», **12** : 5 (77), 3—122, 1957.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Об асимптотике решения краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений «Докл. АН СССР», **121**, № 5, 778—781, 1958.
3. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., «Наука», 1972.
4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., «Мир», 1972.
5. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1954.

Поступила в редакцию
6.6 1975 г.

Кафедра
дифференциальных уравнений

V. Yu. Lunin

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR QUASI-LINEAR ELLIPTIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

The methods of V. I. Vishik and L. A. Lyusternik are used to obtain an asymptotic expansion in powers of a small parameter for the solution of the problem

$$-\varepsilon^4 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^3 - \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + F(x, u) = 0, \qquad u|_\Gamma = 0.$$