Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

6

Отдельный оттиск

1973

Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1973

УДК 517.93

В. Ю. ЛУНИН

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ АБСТРАКТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

1. Рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения

$$x'(t) = A(t)x(t), \qquad t_0 \leqslant s \leqslant t < \infty, \tag{1}$$

$$x(s) = x_0. \tag{2}$$

Здесь неизвестная функция $x(t)$ действительного переменного t принимает значения в банаховом пространстве E; $A(t)$ — семейство замкнутых линейных операторов в E (вообще говоря, неограниченных) с не зависящей от t областью определения $D(A)$, плотной в E.

Следуя работе [1], введем определения.

Определение 1. Ослабленным решением уравнения (1) на $[s, \infty)$ называется функция $x(t)$, непрерывная на $[s, \infty)$, непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая уравнению (1) на (s, ∞).

Определение 2. Уравнение (1) называется абстрактным параболическим, если для всякого $x_0 \in E$ и $s \in [t_0, \infty)$ существует единственное ослабленное решение $x(t, s)$ уравнения, удовлетворяющее условию $x(s, s) = x_0$ и обладающее следующими свойствами:

а) $x(t, s)$ непрерывна по совокупности t и s при $t_0 \leqslant s \leqslant t < \infty$;

б) $x_t'(t, s)$ непрерывна по совокупности t и s при $t_0 \leqslant s < t < \infty$;

в) из сходимости $x_{0,n} \in D(A)$ к нулю следует сходимость к нулю соответствующих решений $x_n(t, s)$ равномерно в каждой области $0 < \delta \leqslant t - s \leqslant T$.

Для абстрактного параболического уравнения можно ввести эволюционный оператор $U(t, s)$ так, что любое решение $x(t, s)$ задачи (1)—(2) имеет вид

$$x(t, s) = U(t, s)x_0$$

(см. [1], глава II).

Будем в дальнейшем предполагать, что $A(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

I. Оператор-функция $A(t)$ такова, что уравнение (1) является абстрактным параболическим и, более того, для $x_0 \in D(A)$ соответствующие решения непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют уравнению (1) на $[s, \infty)$.

II. При любом $s \in [t_0, \infty)$ оператор $A(s)$ порождает полугруппу $U_s(t)$ класса C_0, аналитическую в некотором секторе комплексной плоскости, содержащем вещественную полуось $t>0$, причем

$$\| U_s(t) \| \leqslant N(s) e^{\omega(s) t}, \qquad t \geqslant 0; \tag{3}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} U_s(t) \right\| \leqslant \frac{M(s)}{t} e^{\mu(s) t}, \qquad t > 0. \tag{4}$$

Здесь $N(s)$, $M(s) \in C^1[t_0, \infty)$, $N(s) \geqslant 0$; $M(s) > 0$, $\mu(s) \in C[t_0, \infty)$ и $\omega(s) \leqslant \mu(s)$ для $s \geqslant t_0$.

III. Оператор-функция $A(t)$ сильно непрерывна на $D(A)$, при любом $s \in [t_0, \infty)$ оператор $A(t)$ имеет ограниченный обратный, определенный во всем E, и

$$\| A(t) A^{-1}(s) - \mathbf{I} \| \leqslant \beta(t) \gamma(s) (t - s), \tag{5}$$

где $\beta(t)$, $\gamma(t) \in C[t_0, \infty]$, причем функция $\dfrac{N(s)}{M(s)\gamma(s)}$ не убывает при $s \in [t_0, \infty)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия I—III, тогда для нормы оператора $U(t, s)$ справедлива оценка

$$\| U(t, s) \| \leqslant N(s) \exp \left\{ \nu(t, s)(t - s) + \int_s^t M(\tau) \beta(\tau) \gamma(\tau) d\tau \right\}, \tag{6}$$

где

$$\nu(t, s) = \sup_{\tau \in [s, t]} \mu(\tau).$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in D(A^2(s))$, тогда $A(s) x_0 \in D(A)$, то есть функция $U_s(t-s) A(s) x_0$ непрерывна по t на $[s, \infty)$.

Так как операторы $U_s(t-s)$ и $A(s)$ коммутируют на $D(A)$ и оператор-функция $[A(t) - A(s)] A^{-1}(s)$ сильно непрерывна по t и при каждых t и s представляет собой ограниченный оператор, функция

$$f(t) = -[A(t) - A(s)] U_s(t - s) x_0 = -[A(t) - A(s)] A^{-1}(s) U_s(t - s) A(s) x_0$$

непрерывна по t на $[s, \infty)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$x'(t) = A(t) x(t) - [A(t) - A(s)] x(t), \quad x(s) = x_0.$$

Так как ее решение дается формулой

$$x(t) = U_s(t - s) x_0,$$

то $x(t)$ удовлетворяет соотношению

$$x'(t) = A(t) x(t) + f(t),$$

где

$$f(t) = -[A(t) - A(s)] x(t) = -[A(t) - A(s)] U_s(t - s) x_0.$$

В силу условия 1 и непрерывности $f(t)$ (см. [1], глава II, § 3, п. 2) решение $x(t)$ может быть записано в виде

$$x(t) = U(t, s) x_0 - \int_s^t U(t, \tau) [A(\tau) - A(s)] U_s(\tau - s) x_0 d\tau,$$

то есть

$$U(t,\ s)x_0 = U_s(t-s)\,x_0 + \int_s^t U(t,\ \tau)\,[A(\tau)A^{-1}(s) - \mathbf{I}]\,A(s)\,U_s(\tau - s)\,x_0 d\tau.$$

Учитывая, что $D(A^2(s))$ — плотное в E множество, имеем

$$\|U(t,\ s)\| \leqslant \|U_s(t-s)\| + \int_s^t \|U(t,\ \tau)\| \cdot \|A(\tau)A^{-1}(s) - \mathbf{I}\| \cdot \|\frac{\partial}{\partial\tau}\ U_s(\tau - s)\| d\tau.$$

Применяя оценки (3), (4), (5) и полагая $\varphi(s) = \|U(t,\ s)\| \exp\{\nu(t,t_0)s\}$, получаем для $\varphi(s)$ неравенство

$$\varphi(s) \leqslant N(s)\,e^{\nu(t,t_0)t} + \int_s^t M(s)\,\gamma(s)\,\beta(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad t_0 \leqslant s \leqslant t < \infty,$$

где $\nu(t,\ t_0) = \sup\limits_{\tau\in[t_0,t]} \mu(\tau)$.

Из теоремы об операторном неравенстве в пространстве с конусом (см. [2], глава I, § 9, п. 5) следует, что $\varphi(s) \leqslant \psi(s)$, где $\psi(s)$ — решение интегрального уравнения

$$\psi(s) = N(s)\,e^{\nu(t,t_0)t} + \int_s^t M(s)\,\gamma(s)\,\beta(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau.$$

Дифференцируя последнее равенство по s, получаем

$$\psi'(s) = \left\{\frac{[M(s)\,\gamma(s)]'_s}{M(s)\,\gamma(s)} - M(s)\,\gamma(s)\,\beta(s)\right\}\psi(s) +$$

$$+ \left\{N'(s)\,e^{\nu(t,t_0)t} - N(s)\,e^{\nu(t,t_0)t}\,\frac{[M(s)\,\gamma(s)]'_s}{M(s)\,\gamma(s)}\right\}, \tag{7}$$

$$\psi(t) = N(t)\,e^{\nu(t,t_0)t}, \qquad t_0 \leqslant s \leqslant t. \tag{8}$$

Решение задачи (7) — (8) дается равенством

$$\psi(s) = N(t)\,e^{\nu(t,t_0)t} \exp\left\{\int_s^t \left[M(\tau)\,\beta(\tau)\,\gamma(\tau) - \frac{[M(\tau)\,\gamma(\tau)]'}{M(\tau)\,\gamma(\tau)}\right] d\tau\right\} -$$

$$- \int_s^t \exp\left\{\int_s^r \left[M(\tau)\,\beta(\tau)\,\gamma(\tau) - \frac{[M(\tau)\,\gamma(\tau)]'}{M(\tau)\,\gamma(\tau)}\right] d\tau\right\} \times$$

$$\times \left\{N'(r)\,e^{\nu(t,t_0)t} - N(r)\,\frac{[M(r)\,\gamma(r)]'}{M(r)\,\gamma(r)}\right] dr.$$

Учитывая, что

$$N(t)\,e^{\nu(t,t_0)t} \exp\left\{\int_s^t \left[-\frac{[M(\tau)\,\gamma(\tau)]'}{M(\tau)\,\gamma(\tau)}\right] d\tau\right\} = N(t)\,e^{\nu(t,t_0)t}\,\frac{M(s)\,\gamma(s)}{M(t)\,\gamma(t)},$$

имеем

$$\psi(s) = M(s)\gamma(s)\frac{N(t)\exp\{\nu(t, t_0)t\}}{M(t)\gamma(t)}\exp\left\{\int_s^t M(\tau)\beta(\tau)\gamma(\tau)\,d\tau\right\} -$$

$$- M(s)\int_s^t \exp\left\{\int_s^r M(\tau)\beta(\tau)\gamma(\tau)\,d\tau\right\} d\frac{N(r)}{M(r)\gamma(r)}.$$

Поскольку $\frac{N(r)}{M(r)\gamma(r)}$ не убывает, отсюда следует, что

$$\psi(s) \leqslant N(s)\exp\left\{\nu(t, t_0)t + \int_s^t M(\tau)\beta(\tau)\gamma(\tau)\,d\tau\right\},$$

то есть

$$\|U(t, s)\| \leqslant e^{-\nu(t,t_0)s}\varphi(s) \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\nu(t,t_0)s}\psi(s) \leqslant N(s)\exp\left\{\nu(t, t_0)(t-s) + \int_s^t M(\tau)\beta(\tau)\gamma(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Пусть теперь s фиксировано. Тогда можно считать $t_0 = s$, то есть $\nu(t, t_0) = \nu(t, s)$, откуда и следует оценка (6).

Замечание. Условия, достаточные для выполнения условия 1, приведены в книге [1, глава II, § 4].

Оценки (3) и (4) для аналитических полугрупп выполняются при любых $\omega(s) > \max\limits_{\lambda\in\sigma[A(s)]} \operatorname{Re}\lambda$, $\mu(s) > \max\limits_{\lambda\in\sigma[A(s)]} \operatorname{Re}\lambda$ с некоторыми константами $N_\omega(s)$ и $M_\mu(s)$; $\sigma[A(s)]$ — спектр оператора $A(s)$ (см. [1], глава I, § 3, п. 4).

Оценка (5) выполняется, например, если $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируема на $D(A)$ и

$$\sup_{\tau\in[s,t]} \|A'(\tau)A^{-1}(s)\| \leqslant \gamma(s)\beta(t).$$

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и

$$\varkappa = \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\mu(t) + \overline{\lim_{t\to\infty}}\,M(t)\beta(t)\gamma(t).$$

Тогда $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ и T_ε такие, что

$$\|U(t, s)\| \leqslant N_\varepsilon e^{(\varkappa+\varepsilon)\cdot(t-s)} \quad \text{при} \quad t \geqslant T_\varepsilon.$$

Доказательство. Согласно условию $\exists T > s$ такое, что для $t \geqslant T$

$$\mu(t) \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\mu(t) + \frac{\varepsilon}{2} = \varkappa_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$M(t)\gamma(t)\beta(t) \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}}\,M(t)\gamma(t)\beta(t) + \frac{\varepsilon}{2} = \varkappa_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как

$$\|U(t, s)\| \leqslant \|U(t, T)\|\cdot\|U(T, s)\|,$$

$$\|U(t, s)\| \leqslant N(s)\exp\left\{\nu(T, s)\cdot(T-s) + \int_s^T M(\tau)\beta(\tau)\gamma(\tau)\,d\tau\right\}\times$$

$$\times N(T)\exp\left\{\nu(t,\ T)\cdot(t-T)+\int_T^t M(\tau)\beta(\tau)\gamma(\tau)\,d\tau\right\}\leqslant$$

$$\leqslant N(s)N(T)\exp\left\{\left(\nu(T,\ s)-\varkappa_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot(T-s)+\left(\varkappa_1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot(t-s)+\right.$$

$$\left.+\int_s^T\left[M(\tau)\gamma(\tau)\beta(\tau)-\varkappa_2-\frac{\varepsilon}{2}\right]d\tau+\int_s^t\left(\varkappa_2+\frac{\varepsilon}{2}\right)d\tau\right\},$$

то есть

$$\|U(t,\ s)\|\leqslant\left[N(s)N(T)\exp\left\{\left(\nu(T,\ s)-\varkappa_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot(T-s)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_s^T\left[M(\tau)\beta(\tau)\gamma(\tau)-\varkappa_2-\frac{\varepsilon}{2}\right]d\tau\right\}\right]e^{(\varkappa+\varepsilon)\cdot(t-s)}.$$

Следствие 2. Если выполнены условия теоремы 1 и

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\mu(t)+\overline{\lim_{t\to\infty}}\,M(t)\beta(t)\gamma(t)<0,$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

2. Будем в дальнейшем предполагать, что выполнено условие 1) и для нормы оператора $U(t, s)$ справедлива оценка

$$\|U(t,\ s)\|\leqslant Ne^{\sigma(t-s)},$$

где N и σ зависят, вообще говоря, от s.

Рассмотрим в пространстве E задачу

$$x'(t)=A(t)x(t)+f(t,\ x(t)),\tag{9}$$

$$x(s)=x_0,\qquad s\leqslant t<\infty,\tag{10}$$

где $f(t,\ x(t))$ непрерывна на $[s,\ \infty)$ по t для любой непрерывной функции $x(t)$.

Одновременно с (9) — (10) рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t)=U(t,\ s)x_0+\int_s^t U(t,\ \tau)f(\tau,\ x(\tau))\,d\tau,\tag{11}$$

непрерывное решение которого назовем обобщенным решением задачи (9) — (10).

Теорема 2. Пусть отображение $f(t,\ x):[s,\ \infty)\times E\to E$ удовлетворяет условиям:

1) $\|f(t,\ x)\|\leqslant\alpha(t)\|x\|^{1+r}$; $\quad x\in E,\quad \alpha(t)\in C[t_0,\ \infty),\quad r>0$, причем $\sup\limits_{t\geqslant s}\int_s^t\alpha(\tau)e^{r\sigma\tau}d\tau<M<\infty$;

2) $\|f(t,\ x)-f(t,\ y)\|\leqslant g(t,\ \|x\|,\ \|y\|)\|x-y\|$; $\quad t\geqslant s;\quad x,y\in E$, причем $g(t,\ p,\ q)$ непрерывна при $t\geqslant s,\ p\geqslant 0,\ q\geqslant 0$.

Тогда при $\|x_0\| < e^{\sigma s}(rN^{1+r}M)^{-\frac{1}{r}}$ для любого $T > s$ существует единственное обобщенное решение $\bar{x}(t)$ задачи (9) — (10) на $[s, T]$ и

$$\|\bar{x}(t)\| \leqslant \frac{N\|x_0\| e^{\sigma(t-s)}}{\left[1 - rN^{1+r}\|x_0\|^r \int\limits_s^t \alpha(\tau) e^{r\sigma(\tau-s)} d\tau\right]^{1/r}}. \tag{12}$$

Доказательство. Введем функцию

$$\varphi(t) = \left[rN\left(M - \int\limits_s^t \alpha(\tau) e^{r\sigma\tau} d\tau\right)\right]^{1/r}. \text{ В силу условия 1)}$$

$$\varphi(t),\ \varphi^{-1}(t) \in C[s, \infty) \quad \text{и} \quad \inf_{t \geqslant s} \varphi(t) > 0.$$

Пусть T произвольно, $T > s$. Рассмотрим банахово пространство $E_1[s, T]$ непрерывных на $[s, T]$ функций со значениями в E и нормой

$$\|x\|_1 = \sup_{t \in [s,T]} \|\varphi(t) e^{-\sigma t} x(t)\|.$$

Определим отображение $F: E_1[s, T] \to E_1[s, T]$ равенством

$$F(x(t)) = U(t, s) x_0 + \int\limits_s^t U(t, \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Если $\|x_0\| \leqslant e^{\sigma s}(rN^{1+r}M)^{-\frac{1}{r}}$, то отображение F оставляет инвариантным единичный шар пространства $E_1[s, T]$. В самом деле,

$$\|e^{-\sigma t}\varphi(t) Fx(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \varphi(t)\left[Ne^{-\sigma s}e^{\sigma s}(rN^{1+r}M)^{-\frac{1}{r}} + N\int\limits_s^t e^{-\sigma\tau}\|\varphi(\tau) e^{-\sigma\tau} x(\tau)\|^{r+1} \cdot [e^{\sigma\tau}\varphi^{-1}(\tau)]^{r+1} d\tau\right],$$

то есть

$$\|e^{-\sigma t}\varphi(t) Fx(t)\| \leqslant \varphi(t)\left[(rNM)^{-\frac{1}{r}} + N\int\limits_s^t \alpha(\tau) e^{r\sigma\tau}\varphi^{-(r+1)}(\tau) d\tau \|x(t)\|_1\right].$$

Пусть $\|x(t)\|_1 \leqslant 1$. Тогда, так как

$$(rNM)^{-\frac{1}{r}} + N\int\limits_s^t \alpha(\tau) e^{r\sigma\tau}\varphi^{-(r+1)}(\tau) d\tau =$$

$$= (rNM)^{-\frac{1}{r}} + N\int\limits_s^t \alpha(\tau) e^{r\sigma\tau}\left[rN\left(M - \int\limits_s^\tau \alpha(p) e^{r\sigma p} dp\right)\right]^{-\frac{r+1}{r}} d\tau =$$

$$= (rNM)^{-\frac{1}{r}} + \int\limits_s^t \left\{\left[rN\left(M - \int\limits_s^\tau \alpha(p) e^{r\sigma p} dp\right)\right]^{-\frac{1}{r}}\right\}'_\tau d\tau =$$

$$= \left[rN\left(M - \int\limits_s^t \alpha(\tau) e^{r\sigma\tau} d\tau\right)\right]^{-\frac{1}{r}} = \varphi^{-1}(t), \qquad \|Fx(t)\|_1 \leqslant 1.$$

Из инвариантности единичного шара пространства $E_1[s, T]$ и условия 2) следует, что при некотором n оператор F^n будет в единичном шаре сжимающим. В самом деле, пусть $\|x\|_1 \leqslant 1$ и $\|y\|_1 \leqslant 1$. Тогда $\|F^k x\|_1 \leqslant 1$ и $\|F^k y\|_1 \leqslant 1$ для любого k, то есть

$$\|F^k x(t)\| \leqslant e^{\sigma t}\varphi^{-1}(t) \leqslant K_1 \quad \text{и} \quad \|F^k y(t)\| \leqslant e^{\sigma t}\varphi^{-1}(t) \leqslant K_1.$$

Отсюда следует, что

$$g(t, \|F^k x(t)\|, \|F^k y(t)\|) \leqslant L,$$

где L не зависит от k, то есть

$$\|f(t, F^k x(t)) - f(t, F^k y(t))\| \leqslant L\|F^k x(t) - F^k y(t)\|.$$

Далее имеем

$$e^{-\sigma t}\varphi(t)\|Fx(t) - Fy(t)\| \leqslant LN\varphi(t)\int_s^t e^{-\sigma\tau}\alpha(\tau)\|x(\tau) - y(\tau)\|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant LN\varphi(t)\int_s^t \alpha(\tau)\varphi^{-1}(\tau)\|e^{-\sigma\tau}\varphi(\tau)[x(\tau) - y(\tau)]\|d\tau \leqslant LNK_3K_4(t-s)\|x - y\|_1,$$

где

$$K_3 = \sup_{t\in[s,T]}\varphi(t), \quad K_4 = \sup_{t\in[s,T]}\alpha(t)\varphi^{-1}(t);$$

$$e^{-\sigma t}\varphi(t)\|F^2x(t) - F^2y(t)\| \leqslant LNK_3K_4\int_s^t \|e^{-\sigma\tau}\varphi(\tau)\cdot[Fx(\tau) - Fy(\tau)]\|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(LNK_3K_4)^2\cdot(t-s)^2}{2}\|x - y\|_1.$$

По индукции получаем

$$\sigma^{-\sigma t}\varphi(t)\|F^k x(t) - F^k y(t)\| \leqslant \frac{(LNK_3K_4)^k\cdot(t-s)^k}{k!}\|x - y\|_1,$$

то есть

$$\|F^k x - F^k y\|_1 \leqslant \frac{[LNK_3K_4(T-s)]^k}{k!}\|x - y\|_1.$$

Из оценки следует, что существует n, такое, что

$$\|F^n x - F^n y\|_1 \leqslant q\|x - y\|_1 \quad \text{с} \quad q < 1.$$

Таким образом, при $\|x_0\| \leqslant e^{\sigma s}(rN^{1+r}M)^{-\frac{1}{r}}$ в единичном шаре пространства $E_1[s, T]$ существует единственное решение $\bar{x}(t)$ уравнения (11).

Предположим, что $\|x_0\| < e^{\sigma s}(rN^{1+r}M)^{-\frac{1}{r}}$ и существует второе непрерывное решение уравнения (11) на $[s, T_1]$.

Поскольку $\|y(s)\| = \|x_0\| < \varphi^{-1}(s)$, существует $T_2 (T_2 \leqslant T_1)$ такое, что $\|y(t)\| < \varphi^{-1}(t)$ при $s \leqslant t \leqslant T_2$. Это означает, что существуют два решения $y(t)$ и $\bar{x}(t)$, лежащие в единичном шаре пространства $E_1[s, T_2]$, что невозможно.

Итак, на отрезке $[s, T]$ существует единственное непрерывное решение уравнения (11), и в силу произвольности T оно продолжается на всю полуось $t \geqslant s$.

Для дальнейшего нам понадобится (см. [3], глава II, § 11)

Лемма. Пусть $u(t)$, $\gamma(t) \in C[s, \infty)$, $\gamma(t) \geqslant 0$, $u(t) \geqslant 0$ и $r > 0$. Если

$$u(t) \leqslant c + \int_s^t \gamma(\tau)\,[u(\tau)]^{1+r}\,d\tau \qquad \text{при} \quad t \geqslant s$$

и

$$0 \leqslant c < \left[r \int_s^\infty \gamma(\tau)\,d\tau\right]^{-\frac{1}{r}},$$

то

$$u(t) \leqslant c\left[1 - rc^r \int_s^t \gamma(\tau)\,d\tau\right]^{-\frac{1}{r}}.$$

Для доказательства оценки (12) положим $\chi(t) = \|\bar{x}(t)\,e^{-\sigma t}\|$. Тогда из (11) следует

$$\chi(t) \leqslant Ne^{-\sigma s}\|x_0\| + N\int_s^t \alpha(\tau)\,e^{r\sigma\tau}\,\chi^{r+1}(\tau)\,d\tau.$$

Поскольку

$$Ne^{-\sigma s}\|x_0\| < (rNM)^{-\frac{1}{r}} \leqslant \left[r\int_s^\infty Ne^{r\sigma\tau}\,\alpha(\tau)\,d\tau\right]^{-\frac{1}{r}},$$

$$\chi(t) \leqslant \frac{Ne^{-\sigma s}\|x_0\|}{\left[1 - rN^{r+1}\|x_0\|^r \int_s^t \alpha(\tau)\,e^{r\sigma(\tau - s)}\,d\tau\right]^{1/r}},$$

что и доказывает оценку (12).

В заключение приношу глубокую благодарность Р. С. Гусаровой, под руководством которой написана работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970.
2. Далецкий Ю. А., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970.
3. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.

Поступила в редакцию
5.1 1973 г.

Кафедра
дифференциальных уравнений

V. Yu. Lunin

ESTIMATES FOR SOLUTIONS OF ABSTRACT PARABOLIC EQUATIONS WITH NON-LINEAR PERTURBATIONS

Estimates are obtained for solutions of abstract parabolic equations on the semi-axis $[t_0, +\infty]$ in the linear and non-linear cases. In the non-linear case the existence, uniqueness and continuation of solutions are proved.